Kapitel 3
Harmonische Analyse und Integraltransformationen

Niemand kann den Klang einer Geige mit dem einer Flöte verwechseln, auch wenn beide Instrumente dieselbe Melodie spielen. Zumindest ein wesentlicher Grund dafür dürfte wohl allen bekannt sein: Verschiedene Musikinstrumente produzieren zum selben Grundton verschiedene Obertöne. Anhand der Verhältnisse zwischen den Stärken dieser Obertöne (und auch deren zeitlicher Variation) identifiziert unser Ohr die uns vertrauten Instrumente – auch wenn uns diese Verhältnisse quantitativ nicht bewußt sind.

Um einen Ton zu synthetisieren, muß man also die Amplitudenverteilung seiner Oberschwingungen in ihrem zeitlichen Verlauf kennen; erst dann kann man ihn als Überlagerung (elektrisch leicht erzeugbarer) reiner Schwingungen realisieren.

Da Musik in einem Studiengang *Technische Informatik* keine sonderlich zentrale Rolle spielt, werden wir uns hier nur mit einer vereinfachten Version des Problems beschäftigen: Wir ignorieren die Zeitabhängigkeit der Amplitude, betrachten also nur Töne, bei denen die Amplituden der Grundschwingung und der sämtlichen Oberschwingungen zeitlich konstant sind.

In der Musik läßt sich mit so erzeugten Tönen nur wenig anfangen: Selbst wenn man exakt die Amplitudenverhältnisse eines Musikinstruments kopiert, klingt das Ergebnis ziemlich „elektronisch“. Will man aber mehrere Nachrichten gleichzeitig über dieselbe Leitung übertragen, so können reine Schwingungen einer festen Amplitude sehr nützlich

sein als Trägerfrequenzen – sofern der Empfänger in der Lage ist, das empfangene Signal wieder seine Einzelfrequenzen zu zerlegen. Damit steht er vor genau demselben Problem, das auch bei der Zerlegung eines Klangs in Grund- und Oberschwingungen auftritt.

Schließlich hängt auch das Verhalten fast aller Schaltkreise sowie die Leitung eines Signals durch ein Kupfer- oder Glasfaserkabel stark von der Frequenz ab; will man für ein gegebenes Signal ausrechnen, wie es sich verhält, wird es in den meisten Fällen notwendig sein, es zunächst in reine Schwingungen zu zerlegen.

In diesem Kapitel geht es um die Mathematik hinter solchen Zerlegungen; wie sich zeigen wird, beschränkt deren Nützlichkeit sich aber bei weitem nicht auf die bislang angesprochenen Probleme.

§1: Reelle Fourier-Reihen

Wir beginnen mit einem einfachen und anschaulichen Beispiel für den Aufbau einer komplizierten Funktion aus reinen Schwingungen; Ziel des Paragraphen wird dann sein, eine *beliebige* periodische Funktion möglichst exakt als Überlagerung solcher Schwingungen darzustellen.

a) Die schwingende Saite

Ein Ton werde erzeugt durch eine schwingende Saite. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß diese ausschließlich senkrecht zu ihrer Ruhelage schwingt und daß ihre Schwingung auf eine feste Ebene begrenzt ist; die Physiker bezeichnen dies als transversale linear polarisierte Schwingung. Zumindest in erster Näherung kann man einige Musikinstrumente so beschreiben.

Der Zustand der Saite zu einem *festen Zeitpunkt* wird beschrieben durch eine Funktion der Längenkoordinate, die wir wie üblich mit x bezeichnen wollen. Der Wert dieser Funktion an jeder Stelle x ist aber, da die Saite schwingt, auch eine Funktion der Zeit. Wir haben also insgesamt eine Funktion $f(x,t)$ sowohl der Längenkoordinate als auch der Zeit, die angibt, wie weit der Punkt mit Längenkoordinate x zum Zeitpunkt t von seiner Ruhelage entfernt ist. Falls wir annehmen, daß die Schwingung in der (x, y)-Ebene stattfindet, ist $f(x, t)$ also die y-Koordinate des Punktes mit Längenkoordinate x zum Zeitpunkt t. Da wir nur transversale linear polarisierte Schwingungen betrachten, hat dieser Punkt die Koordinaten

$$\big(x, f(x, t)\big)\ ;$$

falls wir auch longitudinale Schwingungen zugelassen hätten, würde auch die x-Koordinate von der Zeit abhängen, und falls wir uns nicht auf linear polarisierte Schwingungen festgelegt hätten, gäbe es noch eine z-Koordinate.

Die Saite ist an beiden Enden fest eingespannt; wir wählen die Koordinaten auf der x-Achse so, daß diese Enden den Werten $x = 0$ und $x = L$ entsprechen, wobei $L \in \mathbb{R}$ die Länge der Saite bezeichnet. Da die Enden nicht schwingen können, muß notwendigerweise

$$f(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad f(L, t) = 0$$

sein; nur für $0 < x < L$ kann $f(x, t)$ wirklich von t abhängen.

Wie könnte f aussehen? In ihrer Ruhelage ist die Saite eine Strecke; die einfachste Form einer Schwingung könnte darin bestehen, daß diese Strecke durch einen Teil einer Sinuslinie ersetzt wird. Da die Funktion an den Stellen 0 und L verschwinden muß und der Sinus bei allen ganzzahligen Vielfachen von π verschwindet, kommen daher Funktionen der Art

$$f(x, t) = A(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}\, x\right)$$

in Frage, wobei $A(t)$ irgendeine Funktion der Zeit ist und k eine natürliche Zahl. Abbildung eins zeigt die entsprechenden Funktionen für $k = 1$ bis 4 und $A(t) \equiv 1$.

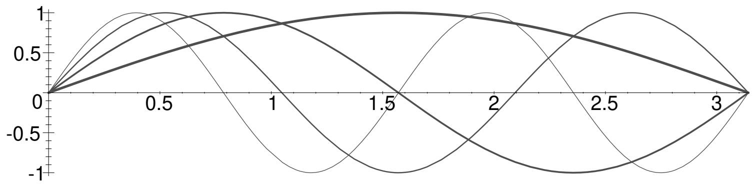


Abb. 1: Eine Schwingung mit Oberschwingungen

Bei einem realen Musikinstrument werden diese Oberschwingungen nicht alle dieselbe Amplitude haben; aus Kapitel I, §1*f)* etwa ist das Beispiel der g-Saite einer Geige bekannt, das hier noch einmal in Abbildung zwei dargestellt ist: Die gestrichelte Kurve ist die Grundschwingung mit Amplitude eins, die fett eingezeichnete Kurve die Gesamtschwingung, und die sonstigen Kurven sind die reinen Teilschwingungen mit ihren jeweiligen Amplituden. (Wer selbst solche Kurven zeichnen und auch die dazugehörigen Töne hören möchte, findet ein Java-Applet unter `http://www.gac.edu/~huber/fourier/`)

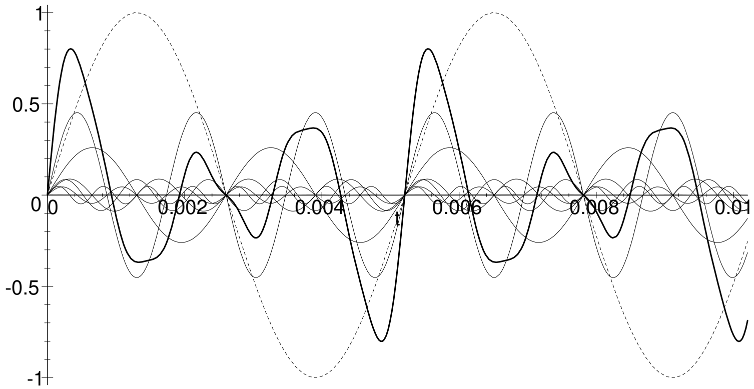


Abb. 2: Ton der g-Saite einer Geige und seine Komponenten

Offensichtlich spielt die Grundschwingung kaum eine Rolle: Wie man sowohl hier als auch genauer an der Darstellung der Größenverhältnisse der Koeffizienten in Abbildung drei sieht, sind die Schwingungen mit doppelter und dreifacher Grundfrequenz am stärksten ausgeprägt, d.h. also die Oktave und vor allem die darüberliegende Quinte.

Über die zeitabhängige Auslenkungsfunktion $A(t)$ wurde bislang noch nichts gesagt; da wir periodische Schwingungen erwarten, liegt es nahe, auch hier einen Ansatz mit trigonometrischen Funktionen zu machen. Wenn wir die Zeitachse so festlegen, daß sich die Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhelage befindet, ist der Sinus die geeignete Funktion; wir

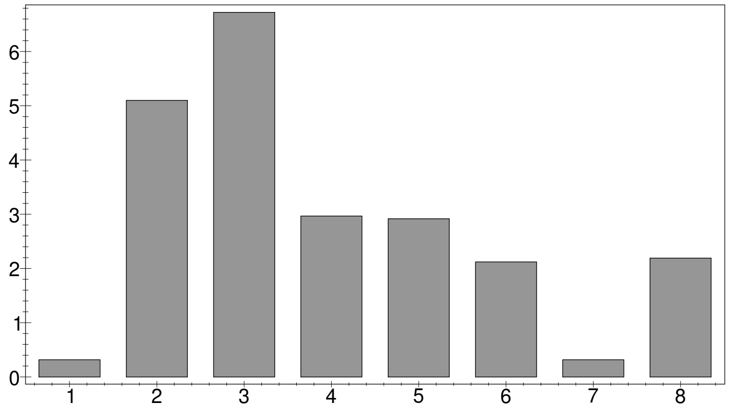


Abb. 3: Koeffizienten von Grund- und Oberschwingungen

versuchen es daher für eine reine Schwingung mit einem Ansatz der Form

$$A(t) = a \cdot \sin \omega t\,,$$

wobei a und ω reelle Konstanten sind, von denen wir zumindest ω als positiv voraussetzen können. Insgesamt erwarten wir somit im einfachsten Fall Funktionen der Form

$$f(x, t) = a \cdot \sin \omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right)\,.$$

ω und k hängen natürlich voneinander ab: Wie jedermann aus Physik- und Musikunterricht weiß, führt ein doppelt so großer Wert von k zu einer doppelt so hohen Kreisfrequenz ω.

b) Die Differentialgleichung der schwingenden Saite

Wer sich allerdings kurz überlegt, *warum* dem so ist, wird wohl in den meisten Fällen nur auf den „Grund“ kommen, daß dies eben allgemein bekannt sei. Tatsächlich stecken dahinter einige nicht ganz triviale Überlegungen, die man für die Zwecke dieser Vorlesung zwar nicht unbedingt kennen muß, die aber für etwaige Interessenten trotzdem im Kleindruck beigefügt sind:

Da wir alles so einfach wie möglich halten wollen, gehen wir aus von einer Saite mit konstantem Querschnitt und konstanter Massendichte; letztere können wir dann beschreiben durch die Masse pro Längeneinheit, die für konkrete Saiten gemessen wird in Gramm pro Zentimeter oder Milligramm pro Zentimeter. Wir bezeichnen diese (lineare) Massendichte mit σ.

Die zweite wesentliche physikalische Größe für eine schwingende Saite ist deren *Spannung.* Auch hier beschränken wir uns wieder auf das einfachste physikalische Modell, in dem das HOOKEsche Gesetz gilt: Wir betrachten die Saite als eine elastische Feder, die eine natürliche Länge L_0 hat. Da sie aber in ein Musikinstrument eingespannt ist, wurde sie auf eine Länge $L > L_0$ gedehnt; nach dem HOOKEschen Gesetz wirkt somit eine Rückstellkraft $\lambda L/L_0$, die proportional ist zur Überdehnung L/L_0 mit der Federkonstanten λ als Proportionalitätsfaktor.

In der Ruhelage ist diese Rückstellkraft bedeutungslos: Da die Saite an beiden Enden fest eingespannt ist, kann sie ihre Länge nicht verringern. Anders wird es, wenn die Saite aus der Ruhelage entfernt wird: Dann hat die Federkraft in allen Punkten, an denen die (Tangente der) Saite nicht parallel zur x-Achse ist, auch eine Kraftkomponente in y-Richtung.

Die Lage der ausgelenkten Saite zu einem festen Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion

$$g(x) = f(x, t)\,,$$

die die y-Koordinate des Punkts x angibt.

Betrachten wir das Saitenstück zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$. Im Punkt x_1 habe die Tangente den Winkel α gegenüber der Horizontalen, im Punkt x_2 sei dieser Winkel β. Falls x_1 und x_2 einigermaßen nahe beieinander liegen, können wir die Saite zwischen x_1 und x_2 in erster Näherung als eine Gerade betrachten. Diese Gerade sei um den Winkel γ gegenüber der Horizontalen geneigt; dann hat das Stück zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$ die Länge

$$\frac{x_2 - x_1}{\cos\gamma}\,,$$

denn der Cosinus eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist gleich Ankathete durch Hypothenuse. Gegenüber ihrer Ruhelage ist die ausgelenkte Saite daher noch um einen weiteren (lokalen) Faktor $1/\cos\gamma$ gestreckt.

Die Rückstellkraft *in Richtung der ausgelenkten Saite* ist daher gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma}\,,$$

und die Komponente in y-Richtung ist im Punkt x_1 gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot \sin\alpha$$

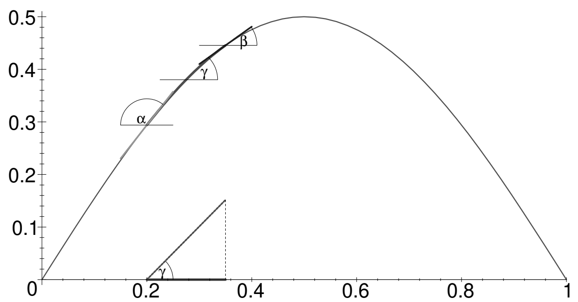


Abb. 4: Eine ausgelenkte Saite

und im Punkt x_2 entsprechend gleich

$$-\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot \sin\beta\ .$$

Da α und β bei gängigen Musikinstrumenten ziemlich klein sind, machen wir kein großen Fehler, wenn wir die Näherungsformeln

$$\sin x \approx x \approx \tan x$$

für im Bogenmaß gemessene Winkel x benutzen; demnach können wir also den Sinus in obigen Formeln ohne großen Genauigkeitsverlust durch einen Tangens ersetzen.

Der Tangens des Steigungswinkels der Tangenten des Graphs einer Funktion $y = g(x)$ gegenüber der Horizontalen ist gleich der Ableitung $g'(x)$, die Rückstellkräfte im Anfangs- und im Endpunkt des betrachteten Kurvenstücks sind also näherungsweise gleich

$$-\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot g'(x_1) \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot g'(x_2)\ .$$

Bei einem hinreichen kleinen Saitenstück ist die resultierende Rückstellkraft gleich der Summe dieser beiden Komponenten, also

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot g'(x_2) - \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot g'(x_1) = \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot \Big(g'(x_2) - g'(x_1)\Big)\ .$$

Da wir von sehr kleinen Winkeln γ ausgehen, liegt $\cos\gamma$ sehr nahe bei eins und kann, da wir hier ohnehin nur näherungsweise argumentieren, gleich eins gesetzt werden; die Rückstellkraft ist also näherungsweise gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \Big(g'(x_2) - g'(x_1)\Big)\ .$$

Diese Kraft bedingt nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz eine Bewegung der Massenpunkte auf der Saite. Ein solcher Massenpunkt mit x-Koordinate x_0 hat eine zeitabhängige Auslenkung

$$h(t) = f(x_0, t)\ ,$$

und für die Kraft, die dies bewirkt, gilt nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}\ .$$

Bei einem hinreichend kleinen Saitenstück können wir die Masse näherungsweise gleich der Masse,

$$m = \sigma \cdot (x_2 - x_1)$$

des gesamten Stück setzen. Die Beschleunigung ist gleich der zweiten Ableitung $\ddot{h}(t)$ der Auslenkung, also gilt insgesamt

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \Big(g'(x_2) - g'(x_1)\Big) = \sigma \cdot (x_2 - x_1) \cdot \ddot{h}(t)$$

oder

$$\frac{g'(x_2) - g'(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sigma L_0}{\lambda L}\ddot{h}(t)\ .$$

Lassen wir nun x_2 und x_1 simultan gegen einen dazwischenliegenden Punkt x gehen, konvergiert die linke Seite gegen $g''(x)$, wir bekommen also die Gleichung

$$g''(x) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L}\ddot{h}(t)\ .$$

Damit sind wir fast fertig; wir müssen uns nur noch klarmachen, daß die beiden Funktionen $g(x)$ und $h(t)$ spezielle Werte der Funktion $f(x,t)$ berechnen: Für einen oben festgehaltenen (aber nicht weiter spezifizierten) Zeitpunkt t ist $g(x) = f(x,t)$, und für einen ebenfalls festgehaltenen (aber nicht weiter spezifizierten) Punkt x auf der Saite ist $h(t) = f(x,t)$. Daher ist

$$g''(x) = f_{xx}(x,t) \quad \text{und} \quad \ddot{h}(t) = f_{tt}(x,t)\ ,$$

und die Differentialgleichung der schwingenden Saite wird zu

$$f_{xx}(x,t) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} f_{tt}(x,t)$$

oder, wie man meist schreibt,

$$f_{tt}(x,t) = \frac{\lambda L}{\sigma L_0} f_{xx}(x,t)\ .$$

Da es uns auf exakte Zahlenwerte nicht ankommt, wählen wir noch eine Abkürzung für den Bruch; da er positiv ist, können wir ihn als Quadrat schreiben und definieren

$$c^2 \underset{\text{def}}{=} \frac{\lambda L}{\sigma L_0}\ .$$

Mit dieser neuen Bezeichnung wird die Differentialgleichung der schwingenden Saite zu

$$f_{tt}(x,t) = c^2 f_{xx}(x,t)\ .$$

Sie allein legt $f(x,t)$ bei weitem noch nicht eindeutig fest: Sind φ und ψ *irgendwelche* zweifach stetig differenzierbare Funktionen einer Veränderlichen, so überzeugt man sich leicht (Kettenregel), daß

$$f(x,t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

eine Lösung dieser Gleichung ist, die sogenannte D'ALEMBERTsche Lösung. Sie zeigt, daß man die Konstante c interpretieren kann als Schallgeschwindigkeit *innerhalb der Saite;* die beiden Terme beschreiben Erregungen, die sich gegenläufig auf der Saite fortbewegen.

Wir waren oben ausgegangen von speziellen sinusförmigen Lösungen der Form

$$f(x,t) = A(t)\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right) = a\cdot\sin\omega t\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right)$$

und müssen nun sehen, für welche Parameterwerte dies Lösungen sind.

Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned}
f_t(x,t) &= a\omega\cdot\cos\omega t\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right)\\
f_{tt}(x,t) &= -a\omega^2\cdot\sin\omega t\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right) = -\omega^2 f(x,t)\\
f_x(x,t) &= a\cdot\sin\omega t\cdot\left(\frac{k\pi}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{L}\right)\\
f_{xx}(x,t) &= -a\cdot\sin\omega t\cdot\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2\sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right) = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 f(x,t)\,,
\end{aligned}$$

also ist

$$f_{tt}(x,t) = \left(\frac{k\pi}{\omega L}\right)^2 f_{xx}(x,t)\,.$$

Die Differentialgleichung ist somit genau dann erfüllt, wenn

$$c = \frac{k\pi}{\omega L} \quad\text{oder}\quad \omega = k\cdot\frac{\pi}{cL}\,.$$

Wie diese Rechnung zeigt, wächst zumindest für die hier betrachteten einfachen Schwingungen die Frequenz in der Tat linear mit k, die Frequenzen der Obertöne sind also ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz.

c) Ein Skalarprodukt für periodische Funktionen

Bevor wir eine beliebige periodische Funktion als Überlagerung reiner Schwingungen darstellen, wollen wir uns zunächst daran erinnern, wie wir im letzten Semester einen Vektor $\vec v\in\mathbb{R}^n$ als Linearkombination von n vorgegebenen Basisvektoren $\vec b_1,\dots,\vec b_n$ dargestellt haben: Im allgemeinen mußten wir dazu ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen in n Unbekannten lösen.

Falls $\{\vec b_1,\dots,\vec b_n\}$ allerdings eine Orthogonalbasis ist, geht es auch einfacher: Wenn es dann eine Darstellung der Form

$$\vec v = \lambda_1\vec b_1+\cdots+\lambda_n\vec b_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i\vec b_i$$

gibt (und da wir von einer Basis ausgegangen sind, wissen wir, daß es sie gibt), ist

$$\vec v\cdot\vec b_j = \left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\vec b_i\right)\cdot\vec b_j = \sum_{i=1}^n\lambda_i\vec b_i\cdot\vec b_j = \lambda_j\vec b_j\cdot\vec b_j\,,$$

denn bei einer Orthogonalbasis ist

$$\vec b_i\cdot\vec b_j = 0 \quad\text{falls } i\neq j\,.$$

Also ist hier einfach

$$\vec v = \sum_{i=1}^n\lambda_i\vec b_i \quad\text{mit}\quad \lambda_i = \frac{\vec v\cdot\vec b_i}{\vec b_i\cdot\vec b_i}\,,$$

was insbesondere für große n erheblich schneller und angenehmer zu berechnen ist als die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Beispielsweise stehen die drei Vektoren

$$\vec v_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \vec v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad \vec v_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$$

aufeinander senkrecht; wenn wir den Vektor

$$\vec v = \begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

daraus linear kombinieren möchten, berechnen wir

$$\lambda_1 = \frac{\vec v\cdot\vec v_1}{\vec v_1\cdot\vec v_1} = \frac{-2}{6} = -\frac13,\qquad \lambda_2 = \frac{\vec v\cdot\vec v_2}{\vec v_2\cdot\vec v_2} = \frac{10}{5} = 2$$

und

$$\lambda_3 = \frac{\vec v\cdot\vec v_3}{\vec v_3\cdot\vec v_3} = \frac{20}{30} = \frac23\,.$$

Also ist

$$\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}.$$

Wir wollen versuchen, auf dem Vektorraum aller (in einem noch zu präzisierenden Sinne) nicht zu schlimmen periodischen Funktionen ein Skalarprodukt einzuführen. Wie so ein Skalarprodukt von Funktionen grundsätzlich aussehen könnte, wissen wir bereits aus dem letzten Semester: Dort hatten wir beispielsweise auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ ein Skalarprodukt definiert durch

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt.$$

Unsere Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, allerdings hätte ein Integral über ganz $\mathbb{R}$ Konvergenzprobleme; wir beschränken uns daher auf die Integration über ein Periodenintervall.

Zunächst ist eine Klärung der Begriffe angebracht:

Definition: Eine Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt periodisch mit einer Periode $T>0$, falls

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t\in\mathbb{R}.$$

Ist f periodisch mit Periode T, so ist f natürlich auch periodisch mit Periode $2T$, $3T$ *usw.;* falls es eine kleinste Periode $T>0$ gibt, bezeichnen wir diese als *die* Periode von f.

Eine konstante Funktion ist offensichtlich periodisch zu jeder Periode $T>0$; hier ist es nicht möglich von *der* Periode zu reden.

Als nächstes wollen wir einen Vektorraum periodischer Funktionen zur Periode T definieren. Natürlich betrachten wir nicht *alle* Funktionen mit Periode T, denn beliebige Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sind vielzu allgemein um damit vernünftig rechnen zu können.

Eine in der Analysis weithin übliche Lösung dieses Problems besteht darin, daß man sich auf *stetige* Funktionen beschränkt. Das wiederum ist allerdings für uns zu speziell: In der Informationstechnik sind periodische Rechteckimpulse von entscheidender Bedeutung, periodische Funktionen also, die zwischen zwei Werten wie null und eins oder plus und minus eins hin- und herspringen.

Diese Funktionen sind in ihren Sprungstellen offensichtlich unstetig, allerdings gibt es nur endlich viele Unstetigkeitsstellen pro Periode, und damit können wir leben. Wir definieren daher

Definition: Eine Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt *stückweise stetig,* wenn es nur isolierte Punkte gibt, in denen f nicht stetig ist und wenn auch für diese Punkte die links- und rechtsseitigen Limites von $f(t)$ existieren.

Isoliert bedeutet dabei, daß diese Unstetigkeitsstellen keinen Häufungspunkt haben dürfen; bei einer periodischen Funktion heißt das konkret, daß es im Intervall $[0, T]$ höchstens endlich viele Punkte

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{r-1} < t_r = T$$

gibt, so daß f in jedem der offenen Intervalle (t_j, t_{j+1}) stetig ist; an den Punkten t_j *kann* f eine Sprungstelle haben, für die allerdings der links- und der rechtsseitige Grenzwert existieren müssen.

Wir betrachten nun den Vektorraum

$$\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\mathbb{R}) \underset{\text{def}}{=} \left\{ f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ ist stückweise stetig und} \\ f(t+T) = f(t) \text{ für alle } t\in\mathbb{R} \end{array} \right\}$$

und definieren dort ein Produkt durch die Vorschrift

$$(f, g) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)\,dt.$$

Es erfüllt fast alle Forderungen an ein Skalarprodukt; lediglich mit der positiven Definitheit gibt es Probleme: Zwar ist (f, f) stets nichtnegativ, da wir über eine nichtnegative Funktion integrieren, aber aus dem Verschwinden von (f, f) läßt sich bei einer nur stückweise stetigen Funktion nicht auf das Verschwinden von f schließen: Auch für eine Funktion f, die fast überall verschwindet, in einem einzigen Punkt pro Periode aber von null verschieden ist, verschwindet offensichtlich das Integral (f, f), obwohl f nicht die Nullfunktion ist.

Dieses Problem wird sich im folgenden als nicht sonderlich gravierend erweisen, und für den Augenblick zumindest ist es viel wichtiger, daß wir mit diesem Skalarprodukt rechnen können, daß wir also beispielsweise für $T = 2\pi$ das Produkt

$$(\sin 17t,\ \sin 43t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin 17t\ \sin 43t\,dt$$

wirklich ausrechnen können.

d) Komplexe Darstellung trigonometrischer Funktionen

Die erste Schwierigkeit bei der Berechnung eines solchen Integrals besteht darin, daß wir mit dem Integranden in dieser Form nur wenig anfangen können: Wir kennen zwar

$$\int_0^{2\pi} \sin 17t\,dt \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin 43t\,dt\,,$$

denn da das Integral einer reinen Schwingung über eine ganzzahlige Anzahl von Perioden stets verschwindet, ist beides gleich null. Wir wissen aber nicht, ob und gegebenenfalls wie wir ein Produkt zweier Schwingungen auf eine Summe reiner Schwingungen zurückführen können.

Wer eine Formelsammlung aufschlägt, findet dort eine Fülle von Formeln für trigonometrische Funktionen von Summen, mehrfachen Argumenten und so weiter, die sich leider größtenteils nur schwer merken lassen: Schon die Formel

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$$

ist deutlich schwieriger als etwa die Formel

$$e^{3t} = \left(e^t\right)^3,$$

wobei letztere auch dann noch einfach bleibt, wenn die Drei beispielsweise durch eine Zehn ersetzt wird – sehr im Gegensatz zu

$$\cos 10t = 512\cos^{10} t - 1280\cos^8 t + 1120\cos^6 t - 400\cos^4 t + 50\cos^2 - 1\,.$$

Wir wollen in diesem Abschnitt sehen, wie man so komplizierte Formeln wie diese aus so einfachen Formeln wie $e^{10t} = \left(e^t\right)^{10}$ herleiten kann, falls man einen kleinen Umweg über die komplexen Zahlen geht.

Erinnern wir uns zunächst an die Multiplikation komplexer Zahlen: In kartesischen Koordinaten ist

$$(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)\,,$$

aber wir bekommen eine besser verständliche Formel, wenn wir in *Polarkoordinaten* rechnen: Diese legen einen Punkt z fest durch seinen Abstand r vom Nullpunkt und den Winkel φ, den der Strahl von Null nach z mit der reellen Achse bildet. Wir messen diesen Winkel im *Bogenmaß,* seine Größe ist also gleich der Länge des Kreisbogens auf dem Kreis mit Radius eins, den der Winkel ausschneidet. Das Vorzeichen wird so gewählt, daß die Richtung von der positiven reellen zur positiven imaginären Achse positiv, die Gegenrichtung negativ angegeben wird.

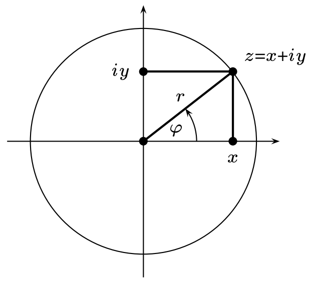


Abb. 5: Polarkoordinaten in der GAUSSschen Zahlenebene

In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Sinus eines der beiden spitzen Winkel gleich dem Verhältnis der Gegenkathete zur Hypothenuse und der Cosinus das der Ankathete zur Hypothenuse. Somit ist hier für $r \neq 0$, d.h. für $z \neq 0$,

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

oder

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi\,,$$

und nach PYTHAGORAS ist $x^2 + y^2 = r^2$.

Damit ist r gleich dem *Betrag* der komplexen Zahl z; den Winkel φ bezeichnen wir als Argument. Er ist für $z = 0$ nicht definiert und für alle anderen komplexen Zahlen modulo 2π eindeutig bestimmt.

Berechnen wir nun das Produkt zweier komplexer Zahlen z und w mit Polarkoordinatendarstellung (r, φ) und (s, ψ)! In kartesischer Darstellung ist

$$z = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi \quad \text{und} \quad w = s\cos\psi + i\,s\sin\psi\,,$$

also ist nach obiger Formel

$$\begin{aligned} z \cdot w = {} & \big(r\cos\varphi \cdot s\cos\psi - r\sin\varphi \cdot s\sin\psi\big) \\ & + i\big(r\cos\varphi \cdot s\sin\psi \;+\; r\sin\varphi \cdot s\cos\psi\big) \\ = {} & rs \cdot \Big(\big(\cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi\big) \\ & \qquad + i\big(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\big)\Big) \\ = {} & rs \cdot \Big(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\Big)\,. \end{aligned}$$

Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen multiplizieren sich also die Beträge, während sich die Argumente addieren.

Damit verhalten sich komplexe Zahlen vom Betrag eins wie Potenzen: Definieren wir für jeden Winkel φ eine komplexe Zahl

$$e_\varphi \underset{\text{def}}{=} \cos\varphi + i\sin\varphi\,,$$

so ist für zwei Winkel φ und ψ

$$e_{\varphi+\psi} = e_\varphi \cdot e_\psi\,.$$

Dies entspricht der Rechenregel

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

für den Umgang mit Potenzen. Daher *definieren* wir dies formal als eine komplexe Potenz

$$e^{i\varphi} \underset{\text{def}}{=} \cos\varphi + i\sin\varphi$$

und merken uns die fundamentale Rechenregel

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}\,.$$

Die Schreibweise $e^{i\varphi}$ erinnert an die wohlbekannte Exponentialfunktion, und in der Tat läßt sich diese auch analytisch so für komplexe Zahlen definieren, daß für rein imaginäre Exponenten die obige Formel gilt: Wir *definieren* e^z für beliebige komplexe Zahlen z durch die TAYLOR-Reihe

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}\,.$$

Da diese Reihe im Reellen absolut konvergent ist, gibt es auch für komplexe Argumente keine Konvergenzprobleme, und speziell für $x = i\varphi$ mit einer reellen Zahl φ erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k\varphi^k}{k!} = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{i^k\varphi^k}{k!} + \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{i^k\varphi^k}{k!} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{i^{2\ell}}{(2\ell)!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{i^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} + i\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} \\ &= \cos\varphi + i\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Auch über die TAYLOR-Reihe der Exponentialfunktion kommen wir also zum gleichen Ausdruck für $e^{i\varphi}$.

Die Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

heißt EULERsche Formel nach dem Schweizer Mathematiker LEONHARD EULER, der sie als erster aufgestellt hat. Ersetzt man φ durch $-\varphi$, wird sie zu

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi\,,$$

und addiert *bzw.* subtrahiert man dies von der ursprünglichen Formel, so ergeben sich die beiden Beziehungen

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\,,$$

die ebenfalls auf EULER zurückgehen.

LEONHARD EULER (1707–1783) wurde in Basel geboren und ging auch dort zur Schule und, im Alter von 14 Jahren, zur Universität. Dort legte er zwei Jahre später die Magisterprüfung in Philosophie ab und begann mit dem Studium der Theologie; daneben hatte er sich seit Beginn seines Studium unter Anleitung von JOHANN BERNOULLI mit Mathematik beschäftigt. 1726 beendete er sein Studium in Basel und bekam eine Stelle an der Petersburger Akademie der Wissenschaften, die er 1727 antrat. Auf Einladung FRIEDRICHS DES GROSSEN wechselte er 1741 an die preußische Akademie der Wissenschaften; nachdem sich das Verhältnis zwischen den beiden dramatisch verschlechtert hatte, kehrte er 1766 nach St. Petersburg zurück. Im gleichen Jahr erblindete er vollständig; trotzdem schrieb er rund die Hälfte seiner zahlreichen Arbeiten (73 Bände) danach. Sie enthalten bedeutende Beiträge zu vielen Gebieten der Mathematik, Physik, Astronomie und Kartographie.

Mit den EULERschen Formeln lassen sich viele Identitäten für trigonometrische Funktionen leicht ausrechnen, z.B.

$$\sin^2\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2i\varphi}-2+e^{-2i\varphi}}{-4} = \frac{1}{2}-\frac{\cos 2\varphi}{2}$$

oder

$$\begin{aligned}\cos^3\varphi &= \left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3i\varphi}+3e^{i\varphi}+3e^{-i\varphi}+e^{-3i\varphi}}{8}\\ &= \frac{\cos 3\varphi + 3\cos\varphi}{4}\,.\end{aligned}$$

e) Die Orthogonalitätsrelationen für trigonometrische Funktionen

Wir interessieren uns für Skalarprodukte trigonometrischer Funktionen, also für Integrale über Produkte aus zwei trigonometrischen Funktionen. Diese könnten wir (umständlich) mittels partieller Integration berechnen, mit den EULERschen Formeln aber können wir den Integranden so umformen, daß die gesamte Integration trivial wird:

Für zwei ganze Zahlen k und ℓ ist

$$\begin{aligned}\cos k\varphi\cdot\cos\ell\varphi &= \left(\frac{e^{ik\varphi}+e^{-ik\varphi}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\ell\varphi}+e^{-i\ell\varphi}}{2}\right)\\ &= \frac{e^{i(k+\ell)\varphi}+e^{i(k-\ell)\varphi}+e^{i(-k+\ell)\varphi}+e^{-i(k+\ell)\varphi}}{4}\\ &= \frac{e^{i(k+\ell)\varphi}+e^{-i(k+\ell)\varphi}}{4}+\frac{e^{i(k-\ell)\varphi}+e^{-i(k-\ell)\varphi}}{4}\\ &= \frac{1}{2}\Big(\cos(k+\ell)\varphi+\cos(k-\ell)\varphi\Big)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin k\varphi\cdot\sin\ell\varphi &= \left(\frac{e^{ik\varphi}-e^{-ik\varphi}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\ell\varphi}-e^{-i\ell\varphi}}{2i}\right)\\ &= \frac{e^{i(k+\ell)\varphi}-e^{i(k-\ell)\varphi}-e^{i(-k+\ell)\varphi}+e^{-i(k+\ell)\varphi}}{-4}\\ &= -\frac{e^{i(k+\ell)\varphi}+e^{-i(k+\ell)\varphi}}{4}+\frac{e^{i(k-\ell)\varphi}+e^{-i(k-\ell)\varphi}}{4}\\ &= \frac{1}{2}\Big(\cos(k-\ell)\varphi-\cos(k+\ell)\varphi\Big)\qquad\text{und}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos k\varphi\cdot\sin\ell\varphi &= \left(\frac{e^{ik\varphi}+e^{-ik\varphi}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\ell\varphi}-e^{-i\ell\varphi}}{2i}\right)\\ &= \frac{e^{i(k+\ell)\varphi}-e^{i(k-\ell)\varphi}+e^{i(-k+\ell)\varphi}-e^{-i(k+\ell)\varphi}}{4i}\\ &= \frac{e^{i(k+\ell)\varphi}-e^{-i(k+\ell)\varphi}}{4i}-\frac{e^{i(k-\ell)\varphi}+e^{-i(k-\ell)\varphi}}{4i}\\ &= \frac{1}{2}\Big(\sin(k+\ell)\varphi+\sin(k-\ell)\varphi\Big)\,.\end{aligned}$$

Setzen wir jetzt noch

$$\varphi=\omega t\quad\text{mit}\quad\omega=\frac{2\pi}{T}$$

für eine vorgegebene Periode $T > 0$, so erhalten wir die leicht allgemeineren Formeln

$$\begin{aligned} \cos k\varphi \cdot \cos \ell\omega t &= \frac{1}{2}\Big(\cos(k+\ell)\omega t + \cos(k-\ell)\omega t\Big)\,, \\ \sin k\omega t \cdot \sin \ell\omega t &= \frac{1}{2}\Big(\cos(k-\ell)\omega t - \cos(k+\ell)\omega t\Big) \qquad \text{und} \\ \cos k\omega t \cdot \sin \ell\omega t &= \frac{1}{2}\Big(\sin(k+\ell)\omega t + \sin(k-\ell)\omega t\Big)\,. \end{aligned}$$

Jetzt, nachdem diese Formeln dastehen, lassen sie sich auch leicht rein reell beweisen durch Anwendung der Additionsformeln auf die rechte Seite, und das ist ein typisches Phänomen bei trigonometrischen Funktionen: Über die komplexe Darstellung erhält man keine neuen Ergebnisse, aber man erhält die Ergebnisse oft einfacher als mit rein reeller Rechnung – insbesondere, wenn man noch keine Vermutungen über die Gestalt des Ergebnisses hat. Mit hinreichend viel Erfahrung im Umgang mit trigonometrischen Funktionen hätte man den obigen Produkten freilich sofort angesehen, daß sie etwas mit $\sin(k\pm\ell)\omega t$ und $\cos(k\pm\ell)\omega t$ zu tun haben müssen und hätte sich die Formeln auch ohne den Umweg über das Komplexe herleiten können.

Mit diesen Formeln haben die Integrale über Produkte trigonometrischer Funktionen ihren Schrecken verloren: Da wir über ganze Perioden integrieren, müssen wir eigentlich nicht einmal die Stammfunktionen von Sinus und Cosinus kennen, sondern nur wissen, daß das Integral über eine ganzzahlige Anzahl von Perioden für eine Sinus- oder Cosinusschwingung verschwindet – mit der einen Ausnahme der Cosinus„schwingung“ mit Frequenz null, d.h. also der Konstanten eins: Für ganze Zahlen k, ℓ ist

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos k\omega t\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq 0 \\ 1 & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

und

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin \ell\omega t\,dt = 0\,.$$

Zusammen mit den obigen Formeln ergeben sich daraus sofort die Orthogonalitätsrelationen für trigonometrische Funktionen:

$$(\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) = \frac{1}{T}\int_0^T \cos k\omega t \cos \ell\omega t\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \pm\ell \\ 1/2 & \text{für } k = \pm\ell \neq 0 \\ 1 & \text{für } k = \ell = 0\,, \end{cases}$$

$$(\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) = \frac{1}{T}\int_0^T \sin k\omega t \sin \ell\omega t\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \pm\ell \\ 1/2 & \text{für } k = \pm\ell \neq 0 \\ 0 & \text{für } k = \ell = 0 \end{cases}$$

und

$$(\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = \frac{1}{T}\int_0^T \cos k\omega t \sin \ell\omega t\,dt = 0\,.$$

f) Harmonische Analyse trigonometrischer Polynome

In Abschnitt *c)* haben wir gesehen, wie man einen Vektor im $\mathbb{R}^n$ durch Skalarprodukte leicht als Linearkombination einer vorgegebenen Orthogonalbasis darstellen kann. Diese Vorgehensweise wollen wir nun imitieren für den Vektorraum aller Funktionen, die als Linearkombinationen reiner Schwingungen zu einer Grundfrequenz und deren Oberfrequenzen dargestellt werden können.

Da Linearkombinationen nach Definition immer endlich sind, sind diese Funktionen genau die sogenannten trigonometrischen Polynome:

Definition: Ein (reelles) trigonometrisches Polynom zur Periode $T > 0$ ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die sich mit geeigneten Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$ als

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell \sin \ell\omega t \\ &= \sum_{k=0}^{N} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell \sin \ell\omega t \end{aligned}$$

schreiben läßt mit

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,.$$

Die Rechnungen im letzten Abschnitt zeigen, daß die Funktionen

$$1, \quad \cos k\omega t, \quad \sin \ell\omega t \qquad \text{für } k, l \in \mathbb{N}$$

eine Orthogonalbasis dieses Vektorraums bilden mit

$$(1,\ 1) = 1 \quad \text{und} \quad (\cos k\omega t,\ \cos k\omega t) = (\sin \ell\omega t,\ \sin \ell\omega t) = \frac{1}{2}$$

für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$(f, 1) = a_0\,(1, 1) + \sum_{k=1}^{N} a_k\,(\cos k\omega t, 1) + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell\,(\sin \ell\omega t, 1) = a_0\,,$$

d.h.

$$a_0 = \frac{(f, 1)}{(1, 1)} = (f, 1) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\,.$$

Für $k > 0$ ist entsprechend

$$\begin{aligned}(f, \cos k\omega t) &= a_0\,(1, \cos k\omega t) + \sum_{m=1}^{N} a_m\,(\cos m\omega t, \cos k\omega t)\\ &\quad + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell\,(\sin \ell\omega t, \cos k\omega t)\\ &= a_k\,(\cos k\omega t, \cos k\omega t) = \frac{a_k}{2}\,,\end{aligned}$$

d.h.

$$a_k = 2\,(f, \cos k\omega t) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt\,,$$

und für $\ell > 0$

$$\begin{aligned}(f, \sin \ell\omega t) &= a_0\,(1, \sin \ell\omega t) + \sum_{k=1}^{N} a_k\,(\cos k\omega t, \sin \ell\omega t)\\ &\quad + \sum_{n=1}^{M} b_\ell\,(\sin n\omega t, \sin \ell\omega t)\\ &= b_\ell\,(\sin \ell\omega t, \sin \ell\omega t) = \frac{b_\ell}{2}\,,\end{aligned}$$

d.h.

$$b_\ell = 2\,(f, \sin \ell\omega t) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin \ell\omega t\,dt\,.$$

g) Die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion

Schon bei der g-Saite einer Geige gibt es keinen vernünftigen Grund, warum die Reihe der Obertöne nach endlich vielen Schritten abbrechen sollte: Die Amplituden müssen zwar für die höheren Oberschwingungen schließlich gegen null gehen, da die Summe aller Schwingungen gegen die Schwingung der Geigensaite konvergiert, aber das heißt nur, daß letztere immer besser durch ein trigonometrisches Polynom angenähert werden kann, nicht daß sie eines ist.

Es liegt daher nahe, für beliebige Funktionen aus dem Vektorraum $\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ aller stückweise stetiger Funktionen mit Periode T einfach in obiger Darstellung N und M gegen unendlich gehen zu lassen:

Definition: Die (reelle) FOURIER-Reihe der Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ ist die unendliche Reihe

$$S_f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \qquad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt$$

und

$$b_\ell = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin \ell\omega t\,dt\,.$$

JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768–1830) begann zunächst mit einer Ausbildung zum Priester, beendete diese jedoch nicht, sondern wurde stattdessen Mathematiklehrer. 1793 trat er dem lokalen Revolutionskomittee bei, 1798 begleitete er NAPOLEON auf dessen Ägyptenfeldzug. Nach dem Rückzug aus Ägypten ernannte ihn Napoleon zum Präfekten von Isére; dort in Grenoble begann er mit seinen Arbeiten über Wärmeleitung, aus denen die FOURIER-Reihen hervorgingen. Nach Napoleons endgültiger Vertreibung wurde FOURIER 1817 in die Akademie der Wissenschaften gewählt; 1822 wurde er Sekretär der mathematischen Sektion.

Für trigonometrische Polynome ist nach den Ergebnissen des letzten Abschnitt stets $f(t) = S_f(t)$. Für beliebige periodische Funktionen wissen wir aber nicht einmal, ob die Reihe $S_f(t)$ überhaupt konvergiert, von der Konvergenz gegen $f(t)$ ganz zu schweigen; hier gibt es also noch einiges zu tun.

§2: Erste Beispiele von Fourier-Reihen

Bevor wir uns solchen allgemeinen Fragen zuwenden, wollen wir zunächst anhand einiger Beispiele sehen, was wir realistischerweise erwarten können.

a) Rechenregeln

Als erstes wollen wir uns überlegen, wie wir bei der Berechnung von FOURIER-Koeffizienten überflüssigen Rechenaufwand vermeiden können.

Das größte Potential für Vereinfachungen bieten *Symmetrien* der Funktion. Die beiden wichtigsten Symmetrien sind die Eigenschaften, *gerade* oder *ungerade* zu sein: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gerade, wenn $f(-t) = f(t)$ ist für *alle* $t \in \mathbb{R}$; sie ist ungerade, wenn $f(-t) = -f(t)$ ist für *alle* $t \in \mathbb{R}$. Auch Symmetrien bezüglich anderer Punkte als $t = 0$ lassen sich gelegentlich erfolgreich ausnützen.

A priori läßt sich keine Symmetrie bezüglich $t = 0$ für die Berechnung der hier interessierenden bestimmten Integrale mit Grenzen 0 und T ausnutzen; da wir es hier aber mit periodischen Funktionen zu tun haben, sind wir nicht an diese Integrationsgrenzen gebunden:

Lemma: Ist die Funktion g periodisch mit Periode T, so ist für jedes $\tau \in \mathbb{R}$

$$\int_0^T g(t)\,dt = \int_\tau^{\tau+T} g(t)\,dt\,.$$

Beweis: Wir können τ schreiben als

$$\tau = kT + \tau_0 \quad \text{mit} \quad 0 \le \tau_0 < T \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Wegen der Periodizität von f ist

$$\int_\tau^{\tau+T} g(t)\,dt = \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} g(t)\,dt\,;$$

es reicht also, den Fall $0 \le \tau < T$ zu betrachten. Hierfür ist

$$\int_\tau^{\tau+T} g(t)\,dt = \int_\tau^T g(t)\,dt + \int_T^{\tau+T} g(t)\,dt = \int_\tau^T g(t)\,dt + \int_0^\tau g(t)\,dt$$
$$= \int_0^\tau g(t)\,dt + \int_\tau^T g(t)\,dt = \int_0^T g(t)\,dt\,.$$

■

Speziell für $\tau = -T/2$ ist also auch

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \quad \text{und} \quad a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, und

$$b_\ell = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin \ell\omega t\,dt \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}\,.$$

Ist nun f eine ungerade Funktion, so sind auch alle Funktionen $f(t)\cos k\omega t$ ungerade, d.h.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = 0 \quad \text{und} \quad a_k = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f(t)\sin \ell\omega t$ ist Produkt zweier ungerader Funktionen und somit gerade; dies liefert die Beziehung

$$b_\ell = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin k\omega t\,dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin k\omega t\,dt\,,$$

die je nach der speziellen Form von f entweder nützlich ist oder auch nicht. Auf jeden Fall gibt es aber bei einer ungeraden Funktion in der FOURIER-Reihe keine Cosinusterme (einschließlich des konstanten Terms zu $\cos 0 = 1$); nur Sinusterme können von Null verschiedene Koeffizienten haben.

Für eine gerade Funktion f ist $f(t)\cdot\sin \ell\omega t$ als Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ungerade, d.h.

$$b_\ell = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin \ell\omega t\,dt = 0$$

für alle ℓ. Somit sind keine Sinusterme möglich; nur Cosinusterme (einschließlich des konstanten Terms) können auftreten. Weiter ist

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt = 2\int_{0}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt\,,$$

was wiederum in Abhängigkeit von der speziellen Gestalt von f entweder nützlich ist oder auch nicht.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun endgültig zu konkreten Beispielen; das erste davon ist gerade in der Digitaltechnik von großer Bedeutung:

b) Periodische Rechteckimpulse

Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \le t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} \le t < T \end{cases} \quad \text{mit} \quad f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}\,;$$

offensichtlich ist $f \in L_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Außerdem ist f eine ungerade Funktion, d.h. es gibt nur Sinusterme. Für diese ist

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin \ell\omega t\,dt = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} h\sin \ell\omega t\,dt - \int_{T/2}^{T} h\sin \ell\omega t\,dt\right) \\ &= \frac{2h}{T}\left(-\frac{\cos \ell\omega\frac{T}{2} - 1}{\ell\omega} + \frac{\cos \ell\omega T - \cos \ell\omega\frac{T}{2}}{\ell\omega}\right) \\ &= \frac{2h}{T}\left(\frac{(-1)^{\ell+1} + 1 + 1 + (-1)^{\ell+1}}{\ell\omega}\right)\,, \end{aligned}$$

denn da $\omega T = 2\pi$, ist $\omega T/2 = \pi$ und $\cos \ell\pi = (-1)^\ell$. Somit ist

$$b_\ell = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } \ell \\ \frac{2h}{T}\cdot\frac{4}{\ell\omega} = \frac{4h}{\pi\ell} & \text{für ungerade } \ell \end{cases}$$

und

$$S_f(t) = \frac{4h}{\pi}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)}\,.$$

Wir sollten nicht zu optimistisch sein und erwarten, daß diese FOURIER-Reihe in jedem Punkt t gegen $f(t)$ konvergiert: Wir hätten einen Rechteckimpuls mit Periode T im Intervall $[0,T)$ beispielsweise auch durch

$$g(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

definieren können. $f(t)$ und $g(t)$ unterscheiden sich im Intervall $[0,T]$ nur an der Stelle $t = \frac{T}{2}$ unterscheiden, was bei der Berechnung der

Integrale für die FOURIER-Koeffizienten keine Rolle spielt. Die beiden Funktionen haben daher dieselbe FOURIER-Reihe, und diese kann, selbst wenn sie konvergiert, an der Stelle $t = \frac{T}{2}$ nicht sowohl gegen $f(\frac{T}{2}) = -h$ und $g(\frac{T}{2}) = h$ konvergieren. (Tatsächlich konvergiert sie, da $\omega\frac{T}{2} = \pi$ ist und der Sinus bei allen Vielfachen von π verschwindet, gegen den Mittelwert null der beiden Funktionswerte.)

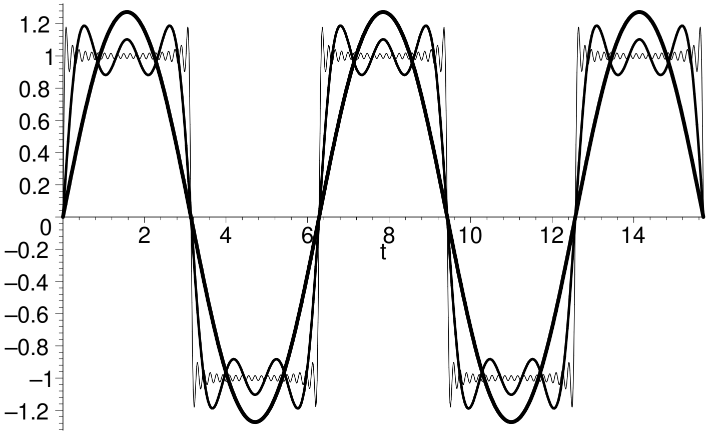


Abb. 6: FOURIERpolynome für Rechteckimpulse

Experimentell konvergiert die berechnete Reihe abgesehen von den Sprungstellen anscheinend recht gut: Abbildung sechs zeigt die Teilsummen mit oberen Grenzen 1, 3 und 20 Summanden, die die Funktion f offensichtlich immer besser annähern. Gerade für die größeren Werte ist dieses Bild natürlich etwas gestört durch numerische Fehler und *alias*-Effekte der Rastergraphik; keine solche Störung sind allerdings die Überschwingungen an den Unstetigkeitsstellen von f: Dieses sogenannte GIBBS-Phänomen ist eine mathematisch unvermeidbare Eigenschaft von FOURIER-Reihen stückweise stetiger Funktionen, mit der wir uns in Kürze näher beschäftigen werden.

Im Augenblick sei nur kurz auf eine Anwendung dieser Überschwingungen hingewiesen: Die Pixel auf einem Computerbildschirm werden

durch Rechteckimpulse geschaltet, wobei aus physikalischen Gründen Oberschwingungen hoher Frequenz bei der Übertragung so stark gedämpft werden, daß für alle praktischen Zwecke nur so etwas wie eine endliche Teilsumme der FOURIER-Reihe übertragen wird. Die in Abbildung eins zu sehenden höherfrequenten Anteile lassen sich mit einem Funkempfänger auffangen und können dann zur Rekonstruktion des Bildschirminhalts verwendet werden; zumindest bei sensitiven Anwendungen muß ein Computer daher so abgeschirmt sein, daß er keine solchen Strahlungen aussendet.

c) Sägezahnimpulse

Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} \quad \text{für} \quad 0 < t < T \quad \text{und} \quad f(0) = 0\,,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T auf ganz $\mathbb{R}$.

Dies ist eine ungerade Funktion, denn für $0 < t < T$ ist

$$f(-t) = f(-t+T) = \frac{T}{4} - \frac{(-t+T)}{2} = \frac{t}{2} - \frac{T}{4} = -f(t)\,,$$

und $f(0) = 0$, wie es sich für eine ungerade Funktion gehört. Die FOURIER-Reihe von f enthält daher nur Sinusterme.

Zu deren Berechnung setzen wir wie üblich

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

und erhalten den Koeffizienten von $\sin \ell\omega t$ als

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin \ell\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T \left(\frac{T}{4} - \frac{t}{2}\right)\sin \ell\omega t\,dt \\ &= \frac{2}{T}\cdot\frac{T}{4}\int_0^T \sin \ell\omega t\,dt - \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{2}\int_0^T t\sin \ell\omega t\,dt \\ &= -\frac{1}{T}\int_0^T t\sin \ell\omega t\,dt\,, \end{aligned}$$

da das Integral einer Sinusfunktion über eine oder mehrere volle Perioden verschwindet. Zur weiteren Rechnung wenden wir die Methode der partiellen Integration an:

$$\int u(t) \cdot \dot{v}(t)\, dt = u(t) \cdot v(t) - \int \dot{u}(t) \cdot v(t)\, dt$$

ergibt für $u(t) = t$ und $\dot{v}(t) = \sin \ell\omega t$ mit $v = -\frac{1}{\ell\omega} \cos \ell\omega t$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \int t \sin \ell\omega t\, dt &= -t\frac{\cos \ell\omega t}{\ell\omega} + \frac{1}{\ell\omega} \int \cos \ell\omega t\, dt \\ &= -t\frac{\cos \ell\omega t}{\ell\omega} + \frac{1}{\ell^2\omega^2} \sin \ell\omega t + C\,. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} b_\ell &= -\frac{1}{T}\left(\frac{-T \cdot \cos \ell\omega T - 0 \cdot \cos 0}{\ell\omega} + \frac{\sin \ell\omega T - \sin 0}{\ell^2\omega^2}\right) \\ &= \frac{1}{\ell\omega} \cos(\ell \cdot 2\pi) = \frac{1}{\ell\omega} \end{aligned}$$

und

$$S_f(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}\,.$$

Wieder haben wir keine Ahnung, ob und gegebenenfalls wohin diese Reihe konvergiert – außer bei den ganzzahligen Vielfachen von $T/2$, denn dort verschwinden alle Sinusfunktionen in den Zählern, so daß die Summe gleich null ist.

Abbildung 7 zeigt die Teilsummen mit 1, 3 und 20 Summanden für $T = 4$; anscheinend nähern diese die Funktion recht gut an, allerdings gibt es wieder Überschwingungen an den Sprungstellen, denn für $T = 4$ haben wir einen Sägezahn, der zwischen +1 und -1 hin- und herpendelt.

d) Konvergenz der berechneten Reihen

Als nächstes wollen, zunächst für Sägezahnschwingungen, die Konvergenz der FOURIER-Reihe untersuchen. Für $t = 0$ und damit auch für alle Vielfachen von T sind alle Summanden null, die Reihe konvergiert also gegen null.

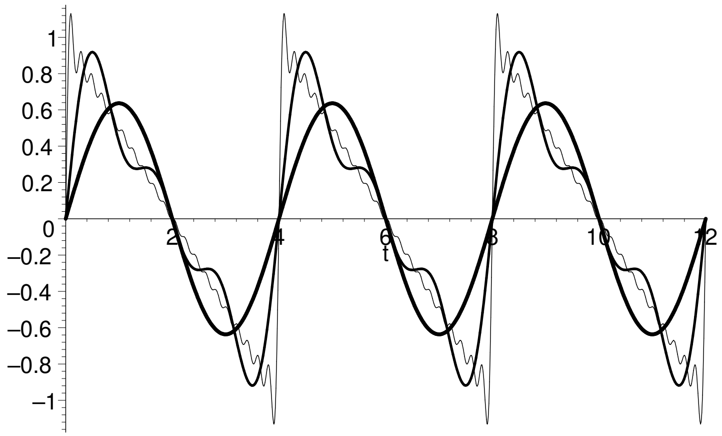


Abb. 7: FOURIERpolynome für die Sägezahnschwingung

Für t aus dem offenen Intervall $(0, T)$ können wir folgendermaßen vorgehen: Die Summanden $\frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}$ sind Stammfunktionen der Funktionen $\cos \ell\omega t$; also ist

$$\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} \quad \text{Stammfunktion von} \quad \sum_{\ell=1}^{N} \cos \ell\omega t\,.$$

Auch die Funktion f läßt sich im Intervall $(0, T)$ als Stammfunktion schreiben: Dort ist

$$f(t) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} = \int_{T/2}^{t} \left(\frac{-1}{2}\right) d\tau\,,$$

und da auch

$$\int_{T/2}^{t} \cos \ell\omega\tau\, d\tau = \frac{\sin \ell\omega t - \sin \ell\omega T/2}{\ell\omega} = \frac{\sin \ell\omega t - \sin \ell\pi}{\ell\omega} = \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}$$

ist, erhalten wir die Differenz zwischen der N-ten Teilsumme und $f(t)$

als Integral:

$$\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) = \int_{T/2}^{t} \left(\sum_{\ell=1}^{N} \cos \ell\omega\tau - \left(\frac{-1}{2}\right)\right) d\tau$$

$$= \int_{T/2}^{t} \left(\frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{N} \cos \ell\omega\tau \right) d\tau\,.$$

Diesen Integranden können wir über die komplexe Darstellung des Cosinus ausrechnen:

$$\frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{N} \cos \ell\omega\tau = \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{N} \frac{e^{\ell\cdot i\omega\tau} + e^{-\ell\cdot i\omega\tau}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=-N}^{N} e^{\ell\cdot i\omega\tau}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-N\cdot i\omega\tau} \sum_{\ell=0}^{2N} e^{\ell\cdot i\omega\tau}$$

ist im wesentlichen eine geometrische Reihe, und die läßt sich bekanntlich leicht ausrechnen: Da

$$(1-q)\sum_{j=0}^{r} q^j = \sum_{j=0}^{r} q^j - \sum_{j=1}^{r+1} q^j = 1 - q^{r+1}$$

ist, folgt für $q \neq 1$ die Formel

$$\sum_{j=0}^{r} q^j = \frac{1-q^{r+1}}{1-q}\,.$$

In unserem Fall ist $q = e^{i\omega\tau}$ und somit

$$\sum_{\ell=0}^{2N} e^{\ell\cdot i\omega\tau} = \frac{1-e^{(2N+1)\cdot i\omega\tau}}{1-e^{i\omega\tau}}\,.$$

Also ist

$$\frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{N} \cos \ell\omega\tau = \frac{1}{2} e^{-N\cdot i\omega\tau} \frac{1-e^{(2N+1)\cdot i\omega\tau}}{1-e^{i\omega\tau}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^{-N\cdot i\omega\tau} - e^{(N+1)\cdot i\omega\tau}}{1-e^{i\omega\tau}}\,.$$

Erweiterung des Bruchs mit $e^{\frac{1}{2}\cdot i\omega\tau}$ führt auf die symmetrischere Form

$$\frac{1}{2} \frac{e^{-(N+\frac{1}{2})\cdot i\omega\tau} - e^{(N+\frac{1}{2})\cdot i\omega\tau}}{e^{-\frac{1}{2}\cdot i\omega\tau} - e^{\frac{1}{2}\cdot i\omega\tau}} = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\,.$$

Damit ist

$$\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) = \int_{T/2}^{t} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\,d\tau\,.$$

Die FOURIER-Reihe konvergiert genau dann im Punkt t gegen $f(t)$, wenn dieses Integral für $N \to \infty$ gegen null geht.

Die Suche nach einer Stammfunktion sieht ziemlich hoffnungslos aus; trotzdem hilft partielle Integration zu einem besseren Verständnis des Integrals. Wir wenden die Regel an mit

$$u(\tau) = \frac{1}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}} \quad \text{und} \quad \dot v(\tau) = \sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau\,,$$

d.h.

$$v(\tau) = -\frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega}\,;$$

das Integral wird zu

$$-\frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}{(2N+1)\omega\sin\frac{\omega t}{2}} + \int_{T/2}^{t} \frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\right) d\tau\,,$$

denn an der unteren Grenze ist

$$\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\frac{T}{2} = \cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi = 0\,.$$

Auf das noch verbleibende Integral wenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung in seiner allgemeinen Form an:

Für eine im Intervall $[a, b]$ *stetige Funktion* v *und eine in* $[a, b]$ *integrierbare Funktion* w *gibt es einen Wert* $\zeta \in [a, b]$*, so daß gilt*

$$\int_a^b v(\tau)w(\tau)\,d\tau = v(\zeta)\int_a^b w(\tau)\,d\tau\,.$$

Für alle, die den Satz nicht in dieser Form kennen, sei der *Beweis* kurz nachgetragen: Als stetige Funktion nimmt v im Intervall $[a, b]$ sowohl seinen Maximalwert $v_{\max}$ als auch seinen Minimalwert $v_{\min}$ an. Der Wert des linksstehenden Integrals liegt dann zwischen

$$v_{\min} \int_a^b w(\tau)\,d\tau \quad \text{und} \quad v_{\max} \int_a^b w(\tau)\,d\tau\,,$$

es gibt also einen Wert $v_0 \in [v_{\min}, v_{\max}]$, so daß

$$\int_a^b v(\tau)w(\tau)\,d\tau = v_0 \int_a^b w(\tau)\,d\tau$$

ist. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt v als stetige Funktion diesen Wert v_0 irgendwo an, es gibt also ein $\zeta \in [a, b]$, so daß $v(\zeta) = v_0$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Hier setzen wir

$$v(\tau) = \frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega} \quad \text{und} \quad w(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\right)\,;$$

wir erhalten

$$\int_{T/2}^{t} \frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega}\,\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\right)d\tau$$

$$= \frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\zeta}{(2N+1)\omega} \int_{T/2}^{t} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\sin\frac{\omega\tau}{2}}\right)d\tau$$

$$= \frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\zeta}{(2N+1)\omega}\left(\frac{1}{\sin\frac{\omega t}{2}} - 1\right)\,,$$

denn $\sin\frac{\omega T}{4} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Also ist

$$\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin\ell\omega t}{\ell\omega} - f(t)$$

$$= -\frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}{(2N+1)\omega\sin\frac{\omega t}{2}} + \frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\zeta}{(2N+1)\omega}\left(\frac{1}{\sin\frac{\omega t}{2}} - 1\right)\,.$$

Für $0 < t < T$ ist $1/\sin\frac{\omega t}{2} \geq 1$, also

$$0 \leq \frac{1}{\sin\frac{\omega t}{2}} - 1 < \frac{1}{\sin\frac{\omega t}{2}}\,,$$

und da der Cosinus nur Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt, folgt, daß

$$\left|\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin\ell\omega t}{\ell\omega} - f(t)\right| \leq \frac{2}{(2N+1)\omega\sin\frac{\omega t}{2}}$$

für alle t mit $0 < t < T$.

Für $N \to \infty$ geht die rechte Seite gegen null, also ist

$$S_f(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin\ell\omega t}{\ell\omega} = f(t)$$

für alle t mit $0 < t < T$. Für $t = 0$ stehen links und rechts Nullen, so daß die Gleichung auch dort gilt, und da beide Seiten periodisch sind mit Periode T, gilt sie tatsächlich für alle $t \in \mathbb{R}$.

Auf abgeschlossenen Teilintervallen von $(0, T)$ ist die Konvergenz sogar gleichmäßig, denn im Intervall $[\varepsilon, T-\varepsilon]$ ist $\sin\frac{\omega t}{2} \geq \sin\frac{\omega\varepsilon}{2}$, d.h.

$$\left|\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin\ell\omega t}{\ell\omega} - f(t)\right| \leq \frac{2}{(2N+1)\omega\sin\frac{\omega\varepsilon}{2}}$$

für alle $t \in [\varepsilon, T-\varepsilon]$.

Mit diesem Resultat können wir nun auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe für Rechteckimpulse genauer untersuchen:

Für $0 < t < \frac{T}{2}$ liegt auch $\frac{T}{2} - t$ im Intervall $(0, T)$, d.h. mit der gerade betrachteten Funktion f für Sägezahnimpulse ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{T}{4} + \frac{t}{2} = \frac{T}{4}\,.$$

Für $\frac{T}{2} < t < T$ liegt $\frac{T}{2} - t$ im Intervall $(-T, 0)$, d.h. $\frac{3T}{2} - t$ liegt in $(0, T)$ und

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = f(t) + f\left(\frac{3T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{3T}{4} + \frac{t}{2} = -\frac{T}{4}\,.$$

Für $t = 0$ sowie auch für $t = \frac{T}{2}$ ist $f(t) + f(\frac{T}{2} - t) = 0$, insgesamt ist also

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{T}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2} \end{cases},$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T. Somit beschreibt $f(t) + f(\frac{T}{2} - t)$ einen Rechteckimpuls.

Da $S_f(t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right)$$

und

$$S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell\omega\left(\frac{T}{2} - t\right)}{\ell\omega} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\ell\omega T}{2} - \ell\omega t\right)}{\ell\omega}$$
$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(\ell\pi - \ell\omega t)}{\ell\omega}.$$

Für gerades ℓ ist

$$\sin(\ell\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$$

und für ungerades ℓ ist

$$\sin(\ell\pi - x) = \sin(\pi - x) = -\sin(x - \pi) = \sin x\,,$$

denn bei Verschiebung um π wird der $\sin x$ zu $-\sin x$. Damit folgt

$$S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}$$

und

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} + \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}.$$

Für endliche Teilsummen heben sich bei dieser Addition einfach die Terme mit geraden Indizes weg, während die mit ungeradem Index

verdoppelt werden, d.h.

$$\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} + \sum_{\ell=1}^{N} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} = 2 \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega}.$$

Durch Grenzübergang $N \to \infty$ folgt

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega},$$

d.h.

$$2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega} = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{T}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2} \end{cases}.$$

Multiplikation beider Seiten mit $4h/T$ führt wegen

$$\frac{8h}{T\omega} = \frac{8h}{2\pi} = \frac{4h}{\pi}$$

zur Formel

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)} = \begin{cases} h & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2} \end{cases}.$$

Damit ist also auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe der Rechteckschwingung geklärt. Als kleine Anwendung können wir den Wert $t = \frac{T}{4}$ einsetzen; für diesen ist

$$\sin(2\ell - 1)\omega\frac{T}{4} = \sin(2\ell - 1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{\ell+1},$$

d.h.

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell - 1)} = h$$

und somit

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell - 1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

e) Das Gibbs-Phänomen

Wie in den Abbildungen sechs und sieben zu sehen ist, zeigen zumindest die dort dargestellten FOURIER-Polynome Überschwingungen an den Sprungstellen. Wir wollen uns davon überzeugen, daß diese auch bei FOURIER-Polynome mit beliebig vielen Summanden nicht verschwinden.

Beginnen wir mit den Rechteckschwingungen! Wir versuchen zunächst, die Summe

$$S_N(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)}$$

in etwas kompakterer Form darzustellen. Wegen

$$\frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)\omega} = \int_0^t \cos(2\ell-1)\omega\tau \, d\tau$$

ist

$$\frac{S_N(t)}{\omega} = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{N} \int_0^t \cos(2\ell-1)\omega\tau \, d\tau = \frac{4h}{\pi} \int_0^t \sum_{\ell=1}^{N} \cos(2\ell-1)\omega\tau \, d\tau \,,$$

und diesen letzten Integranden können wir über seine komplexe Darstellung ausrechnen. Um den Nenner zwei zu eliminieren, berechnen wir den zweifachen Wert

$$2\sum_{\ell=1}^{N} \cos(2\ell-1)\omega\tau = \sum_{\ell=1}^{N} \left(e^{(2\ell-1)\cdot i\omega\tau} + e^{-(2\ell-1)\cdot i\omega\tau}\right)$$

$$= \sum_{\ell=-(N-1)}^{N} e^{(2\ell-1)\cdot i\omega\tau} = e^{(-2N+1)\cdot i\omega\tau} \sum_{\ell=0}^{2N-1} e^{2\ell\cdot i\omega\tau} \,.$$

Letztere Summe ist eine geometrische Reihe mit Quotient $e^{2i\omega\tau}$; nach der Summenformel hat sie den Wert

$$\frac{1-e^{4N\cdot i\omega\tau}}{1-e^{2i\omega\tau}} \,.$$

Die gesuchte Summe ist also

$$e^{-2N\cdot i\omega\tau}\frac{1-e^{4N\cdot i\omega\tau}}{1-e^{2i\omega\tau}} = \frac{e^{-2N\cdot i\omega\tau}}{e^{-i\omega\tau}} \frac{1-e^{4N\cdot i\omega\tau}}{1-e^{2i\omega\tau}}$$

$$= \frac{e^{-2N\cdot i\omega\tau} - e^{2N\cdot i\omega\tau}}{e^{-i\omega\tau} - e^{i\omega\tau}} = \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin\omega\tau}$$

und

$$S_N = \frac{2h\omega}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin\omega\tau} d\tau \,.$$

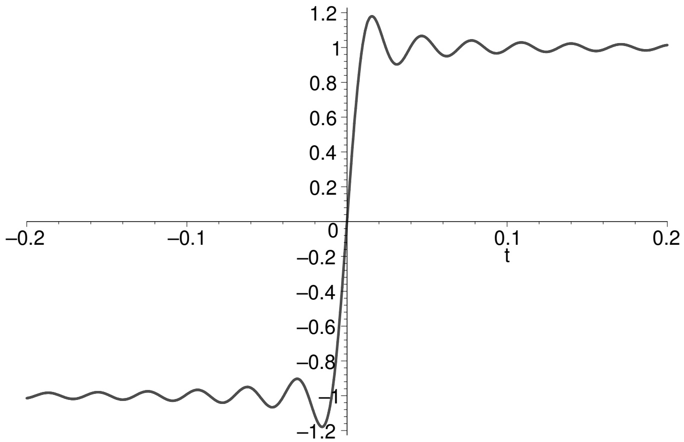


Abb. 8: Das GIBBSphänomen in Großaufnahme

Als nächstes suchen wir nach dem Betrag der Überschwingung. Abbildung acht zeigt diese in Großaufnahme für $S_{100}(t)$; wir wollen das Maximum unmittelbar nach der Sprungstelle bestimmen und das Integral dort auswerten.

Im Maximum verschwindet die Ableitung des Integrals, also der Integrand

$$\frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin\omega\tau} \,.$$

Bei der ersten positiven Nullstelle t_N ist $2N\omega t_N = \pi$ die erste positive Nullstelle des Sinus, d.h.

$$t_N = \frac{\pi}{2N\omega}\,.$$

Insbesondere rückt t_0 mit wachsendem N immer näher zur Null; je größer N wird, desto enger lokalisiert wird die Überschwingung.

Mit der Substitution $u = 2N\omega\tau$ wird

$$S_N(t_N) = \frac{2h\omega}{\pi}\int_0^{t_N} \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin\omega\tau}\,d\tau = \frac{2h}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2N\sin\frac{u}{2N}}\,du\,.$$

Für große Werte von N ist das Argument des Sinus im Nenner des Integranden sehr klein; wir machen also keinen großen Fehler, wenn wir den Sinus durch sein Argument annähern, und für $N \to \infty$ geht der Fehler gegen Null. Somit ist

$$\lim_{N\to\infty} S_N(t_N) = \lim_{N\to\infty} \frac{2h}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2N\cdot\frac{u}{2N}}\,du = \frac{2h}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}\,du\,.$$

Die Stammfunktion von $\frac{\sin u}{u}$ ist nicht in geschlossener Form durch trigonometrische Funktionen, Logarithmen, Exponentialfunktionen und ähnliches ausdrückbar, sie ist aber sehr wichtig und hat daher einen eigenen Namen:

Definition: Die Funktion

$$\mathrm{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du$$

heißt *Integralsinus* oder *sinus integralis.*

Der Integralsinus existiert für beliebige reelle Argumente t, denn die Nullstelle des Integranden bei $u = 0$ ist harmlos, da

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$$

ist. Wie Abbildung neun zeigt, konvergiert er für $t \to \pm\infty$ relativ schnell gegen einen konstanten Wert, von dem eine genauere Untersuchung zeigt, daß es sich um $\pm\pi/2$ handelt.

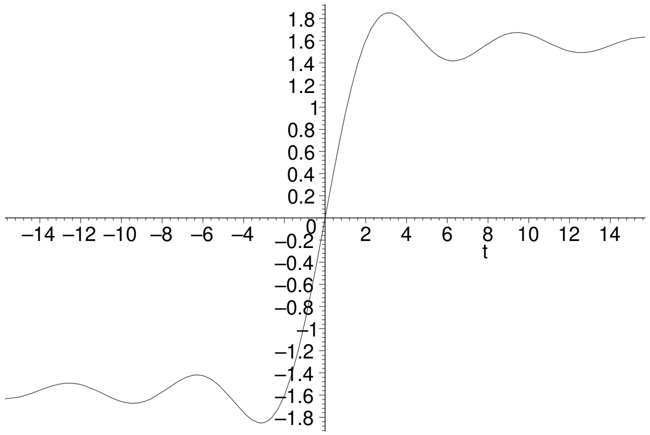


Abb. 9: Der Integralsinus

Der uns interessierende Wert an der Stelle pi läßt sich nicht in einfacher Weise durch andere Konstanten ausdrücken und muß daher numerisch berechnet werden; man erhält

$$\mathrm{Si}(\pi) \approx 1{,}8519305198 \quad \text{und} \quad \frac{2h}{\pi}\,\mathrm{Si}(\pi) \approx 1{,}1789797445\cdot h\,.$$

Die FOURIER-Polynome überschwingen also auch für $N \to \infty$ den Funktionswert noch um knapp 18%.

Auch beim Sägezahn können wir die Überschwingung explizit berechnen: Aus Abschnitt *c3)* wissen wir bereits, daß hier

$$\sum_{\ell=1}^{N}\frac{\sin\ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) = \int_{T/2}^{t}\frac{\sin\left(N+\frac12\right)\omega\tau}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\,d\tau$$

ist. Auch die Ableitung dieser Funktion ist wieder der Integrand; für ihre erste positive Nullstelle t_N ist

$$\left(N+\frac12\right)\omega t_N = \pi\,,\quad \text{d.h.}\quad t_N = \frac{\pi}{\left(N+\frac12\right)\omega} = \frac{T}{2N+1}\,.$$

Mit der Substitution $u = \left(N + \frac{1}{2}\right)\omega\tau$ wird

$$\int\limits_{T/2}^{t_N} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega\tau}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\,d\tau = \int\limits_{\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\pi} \frac{\sin u}{(2N+1)\omega\sin\frac{u}{2N+1}}\,du\,.$$

Wieder können wir den Sinus im Nenner für große N durch sein Argument ersetzen und erhalten somit als Limes für $N \to \infty$

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\pi} \frac{\sin u}{\omega u}\,du = \frac{1}{\omega}\left(\mathrm{Si}(\pi) - \lim_{t\to\infty}\mathrm{Si}(t)\right) = \frac{\mathrm{Si}(\pi) - \frac{\pi}{2}}{\omega}$$

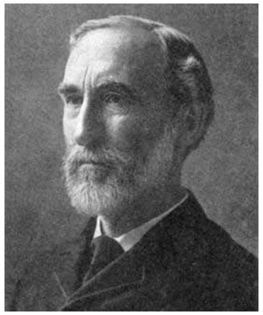
$$= \frac{T}{2\pi}\,\mathrm{Si}(\pi) - \frac{T}{4}\,.$$

Dabei ist $T/4$ der Wert, der überschwungen wird, der Maximalwert des FOURIER-Polynoms geht also für $N \to \infty$ gegen $\frac{T}{2\pi}\,\mathrm{Si}(\pi)$. Dividiert man dies durch $\frac{T}{4}$, ergibt sich wieder der Quotient

$$\frac{T}{2\pi}\,\mathrm{Si}(\pi)\cdot\frac{4}{T} = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Si}(\pi)\,,$$

auch hier gibt es also wieder eine Überschwingung um knapp 18%.

Dies ist kein Zufall: Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, tritt an *jeder* Unstetigkeitsstelle einer Funktion das GIBBS-Phänomen ein, wonach die FOURIER-Polynome den Sprung um diesen Faktor überschwingen.



JOSIAH WILLARD GIBBS (1839–1903) promovierte 1863 an der amerikanischen Yale-Universität mit einer Arbeit über Zahnradgetriebe; die erste amerikanische Dissertation auf dem Gebiet des Ingenieurwesens. Danach unterrichtete er in Yale Latein und Naturphilosophie, bis er 1866 nach Europa fuhr, wo er 1868/1869 in Heidelberg bei KIRCHHOFF und HELMHOLTZ studierte. 1871 wurde er in Yale Professor für mathematische Physik, 1873 publizierte er seine erste Arbeit, die sich, wie viele spätere, mit Thermodynamik befaßte. Sehr einflußreich waren auch seine Arbeiten zur elektromagnetischen Theorie des Lichts und zur Vektoranalysis.

§3: Komplexe Fourier-Reihen und Hermitesche Vektorräume

a) Komplexe Form der Fourier-Reihen

Wir können die EULERschen Formeln in die Definition einer reellen FOURIER-Reihe einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
S_f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t\\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{e^{i\cdot k\omega t} + e^{-i\cdot k\omega t}}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \frac{e^{i\cdot \ell\omega t} - e^{-i\cdot \ell\omega t}}{2i}\\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{i}\cdot k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{-i\cdot k\omega t}\\
&\qquad + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{b_\ell}{2i} e^{i\cdot \ell\omega t} - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{b_\ell}{2i} e^{-i\cdot \ell\omega t}\\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{i}\cdot k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{-i\cdot k\omega t}\\
&\qquad + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{-ib_\ell}{2} e^{i\cdot \ell\omega t} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{ib_\ell}{2} e^{-i\cdot \ell\omega t}\\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{i}\cdot k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-i\cdot k\omega t}\\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\cdot k\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-i\cdot k\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\cdot k\omega t}
\end{aligned}$$

mit

$$c_k = \begin{cases} a_0 & \text{für } k = 0\\ \frac{a_k - ib_k}{2} & \text{für } k > 0\\ \frac{a_k + ib_k}{2} & \text{für } k < 0 \end{cases}\,,$$

falls alle diese Umordnungen in unendlichen Summen zulässig sind.

Diese Umordnungen sind bekanntlich dann problemlos, wenn die betrachteten Summen absolut konvergieren; da wir bislang noch nicht einmal wissen, welche FOURIER-Reihen überhaupt konvergieren, läßt sich im Augenblick dazu noch nichts sagen.

Explizit ist für $k > 0$

$$c_k = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt - i\cdot\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt - i\int_0^T f(t)\sin k\omega t\,dt\right).$$

Für zwei reelle Funktionen $g(t), h(t)$ und reelle Zahlen λ, μ ist

$$\int_0^T \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,dt = \lambda\int_0^T g(t)\,dt + \mu\int_0^T h(t)\,dt,$$

und das wollen wir verallgemeinern auf den Fall $\lambda = 1$ und $\mu = i$, um so Integrale über komplexwertige Funktionen zu *definieren:*

Definition: Für die komplexwertige Funktion $f(t) = g(t) + ih(t)$ ist

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt + i\int_a^b h(t)\,dt$$

und entsprechend für unbestimmte Integrale

$$\int f(t)\,dt = \int g(t)\,dt + i\int h(t)\,dt.$$

Mit dieser Definition ist für $k > 0$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\big(\cos k\omega t - i\sin k\omega t\big)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\cdot k\omega t}\,dt,$$

und diese Formel gilt so offensichtlich auch für $k < 0$. Sie gilt sogar für $k = 0$, denn dann ist $e^{i\cdot 0\cdot\omega t} = e^0 = 1$.

Nachdem wir diese einfache Darstellung der komplexen FOURIER-Koeffizienten haben, wollen wir damit in Analogie zu den reellen FOURIER-Reihen komplexe FOURIER-Reihen direkt definieren:

Definition: *a)* Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig,* wenn sowohl ihr Realteil als auch ihr Imaginärteil stückweise stetig sind.
b) $\mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \underset{\text{def}}{=} \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ ist stückweise stetig und} \\ f(t+T) = f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$
c) Für $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ heißt

$$S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\cdot k\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\cdot k\omega t}$$

komplexe FOURIER-Reihe von f.

Wie man sieht, läßt sich diese komplexe FOURIER-Reihe erheblich kompakter hinschreiben als die reelle, und wie sich gleich zeigen wird, läßt sie sich oft auch sehr schnell ausrechnen.

b) Die Stammfunktion der komplexen Exponentialfunktion

Zunächst müssen wir aber den Umgang mit Integralen über komplexwertige Funktionen etwas üben, und dazu wollen wir uns überlegen, daß sich die Exponentialfunktion im Komplexen genauso integrieren läßt wie im Reellen:

Lemma: Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist

$$\int e^{\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}.$$

Beweis: Sei $\lambda = a + ib$. Da der Fall $b = 0$ der reellen Exponentialfunktion wohlbekannt ist, können wir voraussetzen, daß b nicht verschwindet. Dann ist

$$\int e^{\lambda t}\,dt = \int e^{(a+ib)t}\,dt = \int e^{at}(\cos bt + i\sin bt)\,dt$$

$$= \int e^{at}\cos bt\,dt + i\int e^{at}\sin bt\,dt.$$

Realteil und Imaginärteil lassen sich durch partielle Integration bestimmen:
$$\int e^{at}\cos bt\,dt = e^{at}\,\frac{\sin bt}{b} - \frac{a}{b}\int e^{at}\sin bt\,dt$$
und
$$\int e^{at}\sin bt\,dt = -e^{at}\,\frac{\cos bt}{b} + \frac{a}{b}\int e^{at}\cos bt\,dt\,,$$
d.h.
$$\int e^{at}\cos bt\,dt = e^{at}\frac{\sin bt}{b} + \frac{a}{b}e^{at}\frac{\cos bt}{b} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{at}\cos bt\,dt\,.$$
Somit ist
$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{at}\cos bt\,dt = e^{at}\left(\frac{\sin bt}{b} + \frac{a\cos bt}{b^2}\right)$$
$$= \frac{1}{b^2}e^{at}(b\sin bt + a\cos bt)\,.$$
Multiplikation mit b^2 macht daraus
$$(a^2+b^2)\int e^{at}\cos bt\,dt = b\sin bt + a\cos bt$$
oder
$$\int e^{at}\cos bt\,dt = e^{at}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\cos bt + \frac{b}{a^2+b^2}\sin bt\right)\,.$$
Also ist
$$\begin{aligned}
\int e^{at}\sin bt\,dt &= -e^{at}\,\frac{\cos bt}{b} + \frac{a}{b}\int e^{at}\cos bt\,dt \\
&= e^{at}\left(-\frac{\cos bt}{b} + \frac{a^2}{b(a^2+b^2)}\cos bt + \frac{a}{a^2+b^2}\sin bt\right) \\
&= e^{at}\left(\frac{-(a^2+b^2)+a^2}{b(a^2+b^2)}\cos bt + \frac{a}{a^2+b^2}\sin bt\right) \\
&= e^{at}\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\cos bt + \frac{a}{a^2+b^2}\sin bt\right)\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist also
$$\begin{aligned}
\int e^{\lambda t}\,dt &= \int e^{at}\cos bt\,dt + i\int e^{at}\sin bt\,dt \\
&= e^{at}\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\cos bt + \frac{b+ia}{a^2+b^2}\sin bt\right) \\
&= e^{at}\left(\frac{\cos bt}{a+ib} + \frac{\sin bt}{b-ia}\right) \\
&= e^{at}\left(\frac{\cos bt}{a+ib} + i\frac{\sin bt}{a+ib}\right) = e^{at}\,\frac{e^{ib}}{a+ib} = \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\,,
\end{aligned}$$
wie behauptet. ■

Dieses Lemma wird uns bei künftigen konkreten Berechnungen von FOURIER-Reihen sehr viel Arbeit ersparen, da es oft gestattet, Integrale über Produkte auf Integrale über (komplexe) Exponentialfunktionen zurückzuführen.

c) Ein erstes Beispiel

Als Beispiel berechnen wir die FOURIER-Reihe von

$f(t) = \sinh t$ für $-\pi < t \leq \pi$, periodisch fortgesetzt mit Periode 2π .

Die Koeffizienten der komplexen FOURIER-Reihe sind
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\,dt\,.$$
Man darf nun aber keineswegs den Fehler machen, daraus zu folgern, daß
$$???\qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sinh t\,e^{-k\cdot i\omega t}\,dt\qquad ???$$
sei, denn $f(t)$ stimmt *nur* im Intervall $(-\pi,\,\pi]$ mit $\sinh t$ überein; für $\pi < t \leq 2\pi$ ist $f(t) = \sinh(t-2\pi)$. Falls wir die mit Fragezeichen

versehene Formel benutzen, berechnen wir tatsächlich die FOURIER-Reihe von

$$g(t) = \sinh t \quad \text{für } 0 < t \le 2\pi, \text{ periodisch fortgesetzt mit Periode } 2\pi\,,$$

und das ist, wie die Abbildungen zehn und elf zeigen, eine völlig andere Funktion: f ist eine ungerade Funktion mit einem Wertebereich, der durch die beiden Extrema $\pm\sinh\pi \approx \pm 11{,}54873936$ begrenzt ist, g dagegen eine Funktion mit Werten zwischen null und $\sinh 2\pi \approx 267{,}7448943$, die weder gerade noch ungerade ist.

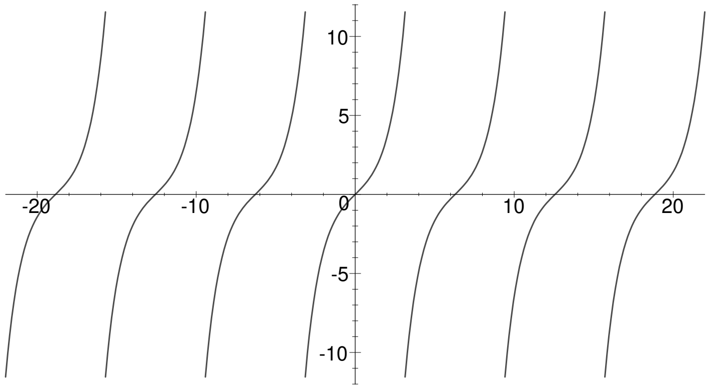


Abb. 10: Die Funktion $f(t)$

Wie groß der Unterschied zwischen den beiden Funktionen wirklich ist, sieht man optisch am besten, wenn man sie wie in Abbildung zwölf in ein gemeinsames Koordinatensystem abbildet: Die fett gezeichneten Kurvenstücke sind beiden Funktionen gemeinsam, und dort, wo f und g nicht übereinstimmen, ist f durch eine ausgezogene, g durch eine gestrichelte Kurve dargestellt.

Wenn wir mit einer Integration von 0 bis 2π arbeiten wollen, müssen

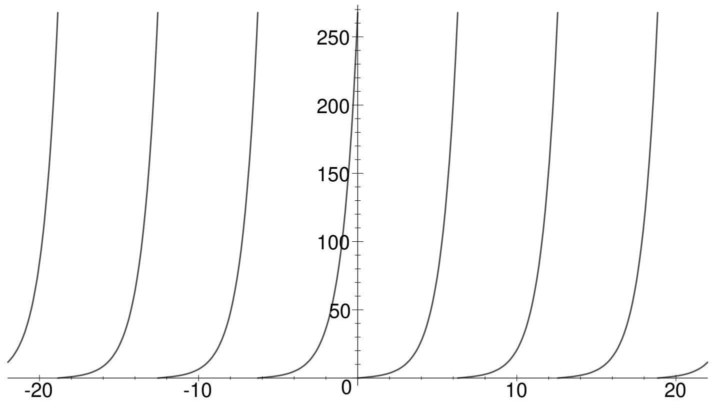


Abb. 11: Die Funktion $g(t)$

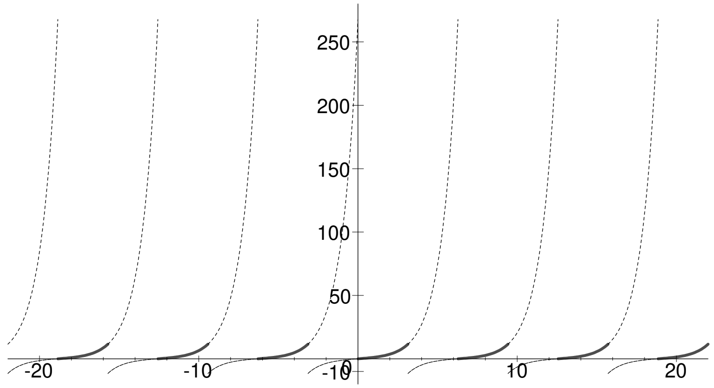


Abb. 12: $f(t)$ und $g(t)$ im gleichen Koordinatensystem

wir also das Integral in zwei Teilintegrale aufteilen:

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-k\cdot it}\,dt = \int_0^{\pi} \sinh t\, e^{-k\cdot it}\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sinh(t-2\pi)\,e^{-k\cdot it}\,dt$$

Zum Glück wissen wir aber aus §2*a)*, daß wir bei einer periodischen Form über jedes beliebige Periodenintervall integrieren dürfen, ohne etwas am Ergebnis zu verändern: Das wurde dort zwar nur für reelle Integrale gezeigt, aber da ein komplexes Integral auf zwei reelle zurückgeführt werden kann, gilt es auch dafür. Also ist auch

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-k\cdot it}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sinh t\, e^{-k\cdot it}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}e^{-k\cdot it}\,dt = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{t(1-ki)}-e^{-t(1+ki)}\right)dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{t(1-ki)}}{1-ki}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{e^{-t(1+ki)}}{-(1+ki)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{\pi}e^{-ki\pi}-e^{-\pi}e^{ki\pi}}{1-ki}+\frac{e^{-\pi}e^{-ki\pi}-e^{\pi}e^{ki\pi}}{1+ki}\right) \\
&= \frac{(-1)^k}{4\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi})\left(\frac{1}{1-ki}-\frac{1}{1+ki}\right) \\
&= \frac{(-1)^k\sinh\pi}{2\pi}\,\frac{(1+ki)-(1-ki)}{1+k^2} = \frac{\sinh\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k\cdot ik}{k^2+1}\,.
\end{aligned}
$$

Die komplexe FOURIER-Reihe ist somit

$$S_f(t) = i\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{k^2+1}e^{ikt}\,.$$

Da der Koeffizient von e^{ikt} eine ungerade Funktion von k ist, fallen beim Einsetzen von $e^{ikt} = \cos kt + i\sin kt$ die Cosinusterme weg, während sich die Sinusterme zu k und zu $-k$ gegenseitig verdoppeln; wir erhalten also die reelle Form

$$S_f(t) = i\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{k^2+1}i\sin kt = -2\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{k^2+1}\sin kt\,,$$

die gleichzeitig die reelle FOURIER-Reihe von f ist.

Bei der direkten Berechnung über die Koeffizientenformeln für die reelle Reihe wäre obiges Lemma ebenfalls nützlich gewesen: Da f eine ungerade Funktion ist, treten nur Sinusterme auf, und deren Koeffizienten

sind

$$b_\ell = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sinh t\,\sin \ell t\,dt\,.$$

Der Integrand hier ist in Exponentialform gleich

$$\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^{i\ell t}-e^{-i\ell t}}{2i} = \frac{e^{t(1+i\ell)}}{4i}-\frac{e^{t(1-i\ell)}}{4i}-\frac{e^{-t(1-i\ell)}}{4i}+\frac{e^{-t(1+i\ell)}}{4i}\,,$$

und die Stammfunktion des Summanden

$$\frac{e^{\pm t(1\pm i\ell)}}{4i}\quad\text{ist}\quad\frac{e^{\pm t(1\pm i\ell)}}{\pm 4i(1\pm i\ell)}\,.$$

Die Stammfunktion des Integranden ist daher

$$
\begin{aligned}
&\frac{e^{t(1+i\ell)}}{4i(1+i\ell)}-\frac{e^{t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)}-\frac{e^{-t(1-i\ell)}}{-4i(1-i\ell)}+\frac{e^{-t(1+i\ell)}}{-4i(1+i\ell)} \\
&\quad= \frac{e^{t(1+i\ell)}-e^{-t(1+i\ell)}}{4i(1+i\ell)}-\frac{e^{t(1-i\ell)}-e^{-t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)}\,,
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
\begin{aligned}
b_\ell &= \frac{e^{t(1+i\ell)}-e^{-t(1+i\ell)}}{4\pi i(1+i\ell)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{e^{t(1-i\ell)}-e^{-t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{\left(e^{\pi(1+i\ell)}-e^{-\pi(1+i\ell)}\right)-\left(e^{-\pi(1+i\ell)}-e^{\pi(1+i\ell)}\right)}{4\pi i(1+i\ell)} \\
&\quad \frac{-\left(e^{\pi(1-i\ell)}-e^{-\pi(1-i\ell)}\right)-\left(e^{-\pi(1-i\ell)}-e^{\pi(1-i\ell)}\right)}{4\pi i(1-i\ell)} \\
&= \frac{(-1)^\ell\left(e^{\pi}-e^{-\pi}-e^{-\pi}+e^{\pi}\right)}{4\pi i(1+i\ell)}-\frac{(-1)^\ell\left(e^{\pi}-e^{-\pi}-e^{-\pi}+e^{\pi}\right)}{4\pi i(1-i\ell)} \\
&= (-1)^\ell\left(\frac{\sinh\pi}{\pi i(1+i\ell)}-\frac{\sinh\pi}{\pi i(1-i\ell)}\right) \\
&= (-1)^\ell\frac{\sinh\pi}{\pi i}\left(\frac{1}{1+i\ell}-\frac{1}{1-i\ell}\right) \\
&= (-1)^\ell\frac{\sinh\pi}{\pi i}\,\frac{(1-i\ell)-(1+i\ell)}{1+\ell^2} = (-1)^\ell\frac{\sinh\pi}{\pi}\,\frac{-2\ell}{\ell^2+1}\,.
\end{aligned}
$$

Das sind, abgesehen von der anderen Bezeichnung für den Index, genau die oben berechneten Koeffizienten.

Wir können das Integral auch ganz ohne komplexe Zahlen ausrechnen: Zweimalige Anwendung der Regel für partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh t\,\sin \ell t\,dt = \frac{1}{\pi}\cosh t \sin \ell t\,\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\ell}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh t \cos \ell t\,dt \\ &= -\frac{\ell}{\pi}\left(\sinh t \cos \ell t\,\Big|_{-\pi}^{\pi} + \ell\int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t\,dt\right) \\ &= -\frac{\ell}{\pi}\left((-1)^\ell\cdot 2\sinh\pi + \ell\pi b_\ell\right) = -\frac{\ell}{\pi}(-1)^\ell\cdot 2\sinh\pi - \ell^2 b_\ell\,. \end{aligned}$$

Somit ist

$$(1+\ell^2)\,b_\ell = -\frac{2\sinh\pi}{\pi}(-1)^\ell\ell \quad\text{und}\quad b_\ell = -\frac{2\sinh\pi}{\pi}\,\frac{(-1)^\ell\ell}{\ell^2+1}\,.$$

Damit haben wir die FOURIER-Reihe von f auf drei verschiedene Weisen berechnet; das Ergebnis war natürlich in allen drei Fällen dasselbe, der Weg dorthin aber recht verschieden. Es hängt sowohl vom Problem als auch von persönlichen Vorlieben ab, welchen Rechengang man vorzieht; gerade bei Funktionen, bei denen die FOURIER-Reihe sowohl Sinus- als auch Cosinusterme enthält, wird aber oft der Weg über die komplexe FOURIER-Reihe am schnellsten sein, da man dann nur ein Integral berechnen muß.

Auch für Untersuchung der Eigenschaften von FOURIER-Reihen ist die komplexe Form oft besser geeignet als die reelle; wir wollen daher als nächstes versuchen, die komplexe Reihe ohne den Umweg über die reelle direkt zu verstehen.

d) Hermitesche Vektorräume

Fundamental für die Berechnung der reellen FOURIER-Koeffizienten war das (Fast-)Skalarprodukt auf $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; wir sollten daher versuchen, etwas ähnliches auch im Komplexen zu definieren.

Wir beginnen der Einfachheit halber mit $\mathbb{C}^n$.

Die unmittelbare Verallgemeinerung des Skalarprodukts des $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{C}^n$ ist nicht sonderlich nützlich: Dann hätten wir nämlich zum Beispiel

$$\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = 1\cdot 1 + i\cdot i = 0\,.$$

Solche Vektoren mit Quadrat Null sind zwar in einigen Anwendungen (wie etwa der speziellen Relativitätstheorie) durchaus sinnvoll, meist möchte man aber das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst als Quadrat seiner Länge interpretieren, und die sollte für alle Vektoren außer dem Nullvektor positiv sein.

Wir haben bereits jeder komplexen Zahl ungleich Null eine positive reelle Zahl zugeordnet, nämlich ihren Betrag

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}\,.$$

Entsprechend können wir zwei komplexen Vektoren

$$\vec v = \begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \vec w = \begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}$$

aus $\mathbb{C}^n$ das Produkt

$$\vec v\cdot\vec w = \sum_{\ell=1}^{n} v_\ell\overline{w_\ell}$$

zuordnen. Auch hier ist offensichtlich $\vec v\cdot\vec v$ für jeden Vektor außer dem Nullvektor eine positive reelle Zahl, denn wir addieren ja die Betragsquadrate der Komponenten des Vektors.

Dieses Produkt erfüllt nun allerdings nicht mehr die Forderungen aus der Definition eines Skalarprodukts: Es ist zwar noch linear im ersten Argument, nicht mehr aber im zweiten, denn schon bei Multiplikation des zweiten Vektors mit einer komplexen Zahl $\lambda\notin\mathbb{R}$ ist

$$\vec v\cdot(\lambda\vec w) = \sum_{\ell=1}^{n} v_\ell\cdot\overline{\lambda w_\ell} = \overline{\lambda}\cdot\sum_{\ell=1}^{n} v_\ell\overline{w_\ell} = \overline{\lambda}\cdot(\vec v\cdot\vec w) \neq \lambda\cdot(\vec v\cdot\vec w)\,.$$

Bezüglich der Addition gibt es keine Probleme; somit wird die Linearitätsregel für das zweite Argument zu

$$\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w})=\overline{\lambda}\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})+\overline{\mu}\cdot(\vec{u}\cdot\vec{w})\,.$$

Die Symmetriebedingung ist ebenfalls verletzt, denn schon für zwei komplexe Zahlen z und w ist das Produkt $z\overline{w}=\overline{w}z=\overline{w\overline{z}}$ im allgemeinen verschieden von $w\overline{z}$, und entsprechend ist auch für zwei Vektoren

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\overline{\vec{w}\cdot\vec{v}}\,.$$

Der Begriff des HERMITEschen Vektorraums formalisiert diese Eigenschaften:

Definition: Ein HERMITEscher Vektorraum ist ein Paar $(V,\cdot)$ bestehend aus einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V und einer Abbildung

$$\cdot : V\times V\to\mathbb{C};\qquad(\vec{v},\vec{w})\mapsto\vec{v}\cdot\vec{w}$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) $\cdot$ ist linear im ersten Argument, d.h.

$$(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\cdot\vec{w}=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{w})+\mu(\vec{v}\cdot\vec{w})$$

für alle $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$ und $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$.

b) $\cdot$ ist HERMITEsch symmetrisch, d.h.

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\overline{\vec{w}\cdot\vec{v}}$$

für alle $\vec{v},\vec{w}\in V$.

c) $\cdot$ ist positiv definit, d.h.

$$\vec{v}\cdot\vec{v}>0$$

ist eine positive *reelle* Zahl für alle Vektoren $\vec{v}\neq\vec{0}$ aus V.

Die bilineare Abbildung $\cdot$ heißt HERMITE*sches Skalarprodukt;* auch hier werden wir den Malpunkt nicht immer hinschreiben und bei Verwechslungsgefahr mit anderen Produkten auch gelegentlich $(\vec{v},\,\vec{w})$ anstelle von $\vec{v}\cdot\vec{w}$ schreiben.

CHARLES HERMITE (1822–1901) war einer der bedeutendsten Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts. Zu seinen Resultaten zählen eine Vereinfachung des ABELschen Beweises, daß Gleichungen fünften Grades im allgemeinen nicht durch Wurzelausdrücke gelöst werden können, die explizite Lösung solcher Gleichungen durch elliptische Funktionen, der Nachweis, daß e eine transzendente Zahl ist, also keiner algebraischen Gleichung über $\mathbb{Q}$ genügt, eine Interpolationsformel und vieles mehr. HERMITE galt als ein sehr guter akademischer Lehrer; er unterrichtete an der École Polytechnique, dem Collège de France, der École Normale Supérieure und der Sorbonne.

Durch Kombination der Eigenschaften *a)* und *b)* kann man leicht ausrechnen, was anstelle der Linearität für das zweite Argument gilt: Genau wie im obigen Beispiel ist

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w})&=\overline{(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w})\cdot\vec{u}}=\overline{\lambda(\vec{v}\cdot\vec{u})+\mu(\vec{w}\cdot\vec{u})}\\&=\overline{\lambda}\,\overline{(\vec{v}\cdot\vec{u})}+\overline{\mu}\,\overline{(\vec{w}\cdot\vec{u})}=\overline{\lambda}\,(\vec{u}\cdot\vec{v})+\overline{\mu}\,(\vec{u}\cdot\vec{w})\,.\end{aligned}$$

Diese Eigenschaft, zusammen mit der Linearität im ersten Argument, bezeichnet man gelegentlich als *Sesquilinearität,* d.h. „anderthalbfache Linearität“, im Gegensatz zur echten Linearität in zwei Argumenten, der *Bilinearität.*

Typisches Beispiel eines HERMITEschen Vektorraums ist der $\mathbb{C}^n$ mit dem eingangs definierten Produkt; was uns hier in erster Linie interessiert sind jedoch HERMITEsche Vektorräume von komplexwertigen Funktionen.

Auch in HERMITEschen Vektorräumen werden wir $\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$ gelegentlich als *Länge* des Vektors $\vec{v}$ bezeichnen; auf die Definition von Winkeln hingegen wollen wir verzichten, da die Übernahme der entsprechenden Definition für EUKLIDische Vektorräume hier auf geometrisch nicht sinnvolle komplexe Winkel führen würde.

Ansonsten können und werden wir EUKLIDische und HERMITEsche Vektorräume im folgenden gleichzeitig behandeln: Ersetzt man in der Definition eines HERMITEschen Vektorraums überall $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$, so erhält man einen EUKLIDischen Vektorraum. Zwar stehen noch an vielen Stellen die Querstriche für komplexe Konjugation, aber da sich eine reelle Zahl unter komplexer Konjugation nicht ändert, sind die Konjugationsstriche nur überflüssig, nicht schädlich.

e) Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Als erstes Beispiel wollen wir die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung für EUKLIDische und HERMITEsche Vektorräume in einer Form beweisen, die auch für EUKLIDische Vektorräume eine leichte Verallgemeinerung der bereits bekannten Ungleichung ist und die darauf Rücksicht nimmt, daß wir in $\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ kein wirkliches Skalar- *bzw.* HERMITEsches Produkt haben:

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: Für $k = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sei auf dem k-Vektorraum V eine Abbildung $\cdot\colon V\times V\to k;\ (f,g)\mapsto f\cdot g$ gegeben mit den Eigenschaften
a) $(\lambda\vec u+\mu\vec v)\cdot\vec w=\lambda(\vec u\cdot\vec w)+\mu(\vec v\cdot\vec w)$
b) $\vec w\cdot\vec v=\overline{\vec v\cdot\vec w}$
c) $\|\vec v\|^2=\vec v\cdot\vec v\geq 0$ für alle $\vec v\in V$.
Dann ist für alle Vektoren $\vec v,\vec w\in V$

$$|\vec v\cdot\vec w|\leq\|\vec v\|\cdot\|\vec w\| \ .$$

(Man beachte, daß hier nicht gefordert wird, daß $\vec v\cdot\vec v>0$ für $\vec v\neq\vec 0$.)

Der *Beweis* beruht auf folgendem Trick: Wegen *c)* ist für $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}(\lambda\vec v+\mu\vec w)\cdot(\lambda\vec v+\mu\vec w)&=\lambda\overline{\lambda}\,\vec v\cdot\vec v+\lambda\overline{\mu}\,\vec v\cdot\vec w+\mu\overline{\lambda}\,\vec w\cdot\vec v+\mu\overline{\mu}\,\vec w\cdot\vec w\\&=\lambda\overline{\lambda}\,\vec v\cdot\vec v+\lambda\overline{\mu}\,\vec v\cdot\vec w+\overline{\lambda}\mu\,\overline{\vec v\cdot\vec w}+\mu\overline{\mu}\,\vec w\cdot\vec w\end{aligned}$$

stets nichtnegativ. Speziell für $\lambda=(\vec w\cdot\vec w)\in\mathbb{R}$ und $\mu=-(\vec v\cdot\vec w)$ erhalten wir

$$(\vec w\cdot\vec w)^2(\vec v\cdot\vec v)-2(\vec w\cdot\vec w)(\overline{\vec v\cdot\vec w})(\vec v\cdot\vec w)+(\vec v\cdot\vec w)(\overline{\vec v\cdot\vec w})(\vec w\cdot\vec w)\geq 0\,,$$

also

$$(\vec w\cdot\vec w)\big((\vec w\cdot\vec w)(\vec v\cdot\vec v)-|\vec v\cdot\vec w|^2\big)\geq 0\,.$$

Ist hier $\vec w\cdot\vec w\neq 0$, können wir durch diese Zahl dividieren und die Behauptung ist bewiesen. Andernfalls können wir, falls wenigstens $\vec v\cdot\vec v$ nicht null ist, im obigen Argument die Rollen von $\vec v$ und $\vec w$ vertauschen und damit die Behauptung beweisen.

Wenn schließlich $\vec v\cdot\vec v$ und $\vec w\cdot\vec w$ beide null sind, folgt aus

$$(\vec v\pm\vec w)\cdot(\vec v\pm\vec w)=\pm(\vec v\cdot\vec w+\overline{\vec v\cdot\vec w})=\pm 2\,\mathfrak{Re}(\vec v\vec w)\geq 0\,,$$

daß der Realteil von $\vec v\cdot\vec w$ verschwindet, und genauso verschwindet auch der Imaginärteil, da $(i\vec v\pm\vec w)\cdot(i\vec v\pm\vec w)=\pm 2\,\mathfrak{Im}(\vec v\cdot\vec w)\geq 0$ ist. Somit ist $\vec v\cdot\vec w=0$, und die Ungleichung gilt auch in diesem Fall. ■

f) Orthonormalbasen Hermitescher Vektorräume

Genau wie in EUKLIDischen Vektorräumen bezeichnen wir auch im HERMITEschen Fall zwei Vektoren als *orthogonal,* wenn ihr (HERMITEsches) Skalarprodukt verschwindet. Mit diesem Begriff kann die Definition von Orthogonal- und Orthonormalbasen wörtlich von EUKLIDischen Fall übernommen werden:

Definition: *a)* Eine Basis $\mathcal{B}$ eines EUKLIDischen oder HERMITEschen Vektorraums heißt *Orthogonalbasis,* wenn jedes Element von $\mathcal{B}$ orthogonal zu allen übrigen ist.
b) Eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ heißt *Orthonormalbasis,* wenn zusätzlich für jeden Vektor $\vec b\in\mathcal{B}$ gilt: $\vec b\cdot\vec b=1$.

Damit ist klar, daß auch im Komplexen die Einheitsvektoren

$$\vec e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \vec e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \dots,\quad \vec e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des n-dimensionalen Vektorraums $\mathbb{C}^n$ bilden.

Genau wie im EUKLIDischen Fall gilt, daß tatsächlich *jeder* HERMITEsche Vektorraum eine Orthonormalbasis hat; für den Beweis werden wir uns allerdings, wie immer, wenn von Basen die Rede ist, zur Vermeidung von logischen Schwierigkeiten auf den endlichdimensionalen Fall beschränken:

Satz: Jeder endlichdimensionale HERMITEsche Vektorraum V hat eine Orthonormalbasis.

Der *Beweis* geht fast genauso wie im EUKLIDischen Fall: Wir wissen bereits, daß V *irgendeine* Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ hat; daraus konstruieren wir zunächst eine *Orthogonalbasis* nach dem GRAM-SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahren. Dieses besteht bekanntlich aus n Schritten, wobei im r-ten Schritt eine Orthogonalbasis $\{vc_1, \dots, \vec{c}_r\}$ von $[\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r]$ konstruiert wird.

Der erste Schritt ist der einfachste: Da es noch keine Orthogonalitätsbedingung für $\vec{c}_1$ gibt, können wir einfach $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$ setzen.

Nachdem wir $r \geq 1$ Schritte durchgeführt haben, haben wir r linear unabhängige Vektoren $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r$ mit $\vec{c}_i \cdot \vec{c}_j = 0$ für $i \neq j$ aus dem von $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ aufgespannten Untervektorraum. Ist $r = n$, haben wir eine Orthogonalbasis; andernfalls muß ein auf den bisher konstruierten $\vec{c}_i$ senkrecht stehender Vektor $\vec{c}_{r+1}$ gefunden werden, der zusammen mit diesen den von $\vec{b}_1$ bis $\vec{b}_{r+1}$ erzeugten Untervektorraum erzeugt.

Da $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r$ und $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ denselben Untervektorraum erzeugen, gilt dasselbe für $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r, \vec{b}_{r+1}$ und $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{r+1}$; das Problem ist, daß $\vec{b}_{r+1}$ im allgemeinen nicht orthogonal zu den $\vec{c}_i$ sein wird. Wir dürfen $\vec{b}_{r+1}$ aber abändern durch einen beliebigen Vektor aus dem von $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r$ aufgespannten Untervektorraum; also setzen wir

$$\vec{c}_{r+1} = \vec{b}_{r+1} + \lambda_1 \vec{c}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{c}_r$$

und versuchen, die λ_i so zu bestimmen, daß dieser Vektor orthogonal zu $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r$ wird.

Wegen der Orthogonalität der $\vec{c}_i$ ist

$$\vec{c}_{r+1} \cdot \vec{c}_i = \vec{b}_{r+1} \cdot \vec{c}_i + \sum_{j=1} \lambda_j (\vec{c}_j \cdot \vec{c}_i) = \vec{b}_{r+1} \cdot \vec{c}_i + \lambda_i (\vec{c}_i \cdot \vec{c}_i)\,;$$

setzen wir daher $\lambda_i = -\dfrac{\vec{b}_{r+1} \cdot \vec{c}_i}{\vec{c}_i \cdot \vec{c}_i}$, so ist $\vec{v} \cdot \vec{c}_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, r$.

Nach dem n-ten Schritt haben wir eine Orthogonalbasis $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ von V konstruiert. Daraus wird die gewünschte *Orthonormalbasis* $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, wenn wir jeden Vektor durch seine Länge dividieren, d.h.

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{c}_i}{\|\vec{c}_i\|}\,.$$

■

Um auch den Umgang mit HERMITEschen Skalarprodukten und das Rechnen mit komplexen Zahlen zu üben, betrachten wir als Beispiel den von

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ -2+i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ -i \\ -4-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{C}^4$.

Wie üblich können wir bei der Anwendung des GRAM-SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahrens $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$ setzen; im zweiten Schritt suchen wir einen Vektor $\vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \lambda_1 \vec{c}_1$ mit der Eigenschaft, daß

$$\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = (\vec{b}_2 + \lambda_1 \vec{c}_1) \cdot \vec{c}_1 = \vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1 + \lambda_1 (\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1) = 0$$

ist. Bis hierher geht alles genauso wie im reellen Fall, allerdings war es dort völlig irrelevant, ob wir $\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = 0$ oder $\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = 0$ fordern wollten. Hier im Komplexen ist das zwar grundsätzlich auch noch irrelevant, denn wegen der Eigenschaft

$$\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = \overline{\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2}$$

verschwindet das eine Produkt genau dann, wenn auch das andere verschwindet. Rechnerisch gibt es allerdings einen Unterschied, denn

$$\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = \vec{c}_1 \cdot (\vec{b}_2 + \lambda_1 \vec{c}_1) = \vec{c}_1 \cdot \vec{b}_2 + \overline{\lambda}_1 (\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1) = 0$$

bestimmt $\overline{\lambda}_1$, nicht λ_1. Falls man dies beachtet, erhält man natürlich bei beiden Ansätzen denselben Wert von λ_1.

Um die komplexe Konjugation zu vermeiden, wählen wir hier den ersten Weg. Dazu benötigen wir die HERMITEschen Skalarprodukte

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ -2+i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bei deren Berechnung darf man auf keinen Fall vergessen, die Einträge des jeweils zweiten Vektors komplex zu konjugieren, d.h.

$$\begin{aligned}\vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1 &= (1+2i)\cdot\overline{1} + (-2+i)\cdot\overline{i} + (-i)\cdot(\overline{-i}) + (-1)\cdot\overline{(-1)}\\ &= (1+2i)\cdot 1 + (-2+i)\cdot(-i) + (-i)\cdot i + (-1)\cdot(-1)\ .\\ &= (1+2i) + (1+2i) + 1 + 1 = 4+4i\end{aligned}$$

Entsprechend ist

$$\begin{aligned}\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 &= 1\cdot\overline{1} + i\cdot\overline{i} + (-i)\cdot(\overline{-i}) + (-1)\cdot(\overline{-1})\\ &= 1\cdot 1 + i\cdot(-i) + (-i)\cdot i + (-1)\cdot(-1) = 1+1+1+1 = 4\,,\end{aligned}$$

wobei das allerdings auch mit weniger Mühe einzusehen ist: Da für einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ mit Komponenten $v_1, \dots, v_n$

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \overline{v_i} = \sum_{i=1}^n |v_i|^2$$

ist, hätte es genügt, einfach die Betragsquadrate der vier Einträge aufzusummieren, wobei im vorliegenden Fall trivial ist, daß alle diese Beträge gleich eins sind.

Einsetzen der beiden Skalarprodukte in die Gleichung für λ_1 zeigt, daß

$$(4+4i) + 4\lambda_1 = 0 \quad \text{und damit} \quad \lambda_1 = \frac{-4-4i}{4} = -1-i$$

sein muß. Somit ist

$$\begin{aligned}\vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \lambda_1\vec{c}_1 &= \begin{pmatrix}1+2i\\-2+i\\-i\\-1\end{pmatrix} - (1+i)\begin{pmatrix}1\\i\\-i\\-1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1+2i\\-2+i\\-i\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1+i\\-1+i\\1-i\\-1-i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i\\-1\\-1\\i\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Im dritten Schritt muß ein Vektor

$$\vec{c}_3 = \vec{b}_3 + \mu_1\vec{c}_1 + \mu_2\vec{c}_2$$

berechnet werden mit

$$\vec{c}_3\cdot\vec{c}_1 = \vec{c}_3\cdot\vec{c}_2 = 0\,.$$

Hier ist

$$\vec{c}_3\cdot\vec{c}_1 = \vec{b}_3\cdot\vec{c}_1 + \mu_1\vec{c}_1\cdot\vec{c}_1 + \mu_2\vec{c}_2\cdot\vec{c}_1 = \vec{b}_3\cdot\vec{c}_1 + \mu_1\vec{c}_1\cdot\vec{c}_1\,,$$

da der zweite Schritt sicherstellte, daß $\vec{c}_2\cdot\vec{c}_1 = 0$ ist. Das HERMITEsche Skalarprodukt $\vec{c}_1\cdot\vec{c}_1 = 4$ kennen wir bereits, und eine kurze Rechnung zeigt, daß

$$\vec{b}_3\cdot\vec{c}_1 = (1+2i) + (-1) + (1-4i) + (-1-2i) = -4i$$

ist. Also folgt

$$\mu_1 = -\frac{\vec{b}_3\cdot\vec{c}_1}{\vec{c}_1\cdot\vec{c}_1} = -\frac{-4i}{4} = i$$

und entsprechend folgt auch

$$\mu_2 = -\frac{\vec{b}_3\cdot\vec{c}_2}{\vec{c}_2\cdot\vec{c}_2} = -\frac{8}{4} = -2\,,$$

wobei diesesmal die genaue Berechnung der beiden HERMITEschen Skalarprodukte dem Leser als Übungsaufgabe überlassen sei. Der dritte Basisvektor $\vec{c}_3 = \vec{b}_3 + i\vec{c}_1 - 2\vec{c}_2$ ist daher gleich

$$\begin{pmatrix}1+2i\\-i\\-4-i\\1+2i\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}1\\i\\-i\\-1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}i\\-1\\-1\\i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+i\\1-i\\-1-i\\1-i\end{pmatrix}.$$

Damit ist eine *Orthogonalbasis* gefunden; wenn wir eine *Orthonormalbasis* wollen, müssen wir die Vektoren noch durch ihre Längen dividieren: Wir wissen bereits, daß $\vec{c}_1\cdot\vec{c}_1 = \vec{c}_2\cdot\vec{c}_2 = 4$ ist, so daß die ersten beiden Vektoren die Länge zwei haben; $\vec{c}_3$ hat vier Komponenten vom Betrag zwei, also ist

$$\vec{c}_3\cdot\vec{c}_3 = 4\cdot 2 = 8 \quad \text{und} \quad \|\vec{c}_2\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\,.$$

Die gesuchte Orthonormalbasis besteht daher aus den Vektoren

$$\frac12\begin{pmatrix}1\\i\\-i\\1\end{pmatrix},\quad \frac12\begin{pmatrix}i\\-1\\-1\\i\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt2}{4}\begin{pmatrix}1+i\\1-i\\-1-i\\1-i\end{pmatrix}.$$

Für das folgende sehr wichtig ist ein weiterer im EUKLIDischen Fall bereits wohlbekannter Satz:

Satz: $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ sei eine Orthonormalbasis eines EUKLIDischen oder HERMITEschen Vektorraums V.
a) Sind $\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n$ und $\vec{w} = b_1\vec{e}_1 + \cdots + b_n\vec{e}_n$ zwei Vektoren aus V, so ist

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i} \,.$$

b) Für einen Vektor $\vec{v} \in V$ ist

$$\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n \quad \text{mit} \quad a_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i \,.$$

Der *Beweis* ist in beiden Fällen ein Einzeiler:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \overline{b_j}\; \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i} \,, \quad \text{denn} \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_i = (a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n) \cdot \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_j \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = a_i \,.$$

Bezüglich einer Orthonormalbasis sieht also jedes (gewöhnliche oder HERMITEsche) Skalarprodukt aus wie das entsprechende Standardskalarprodukt – und das unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis. Sobald man Vektoren bezüglich einer Orthonormalbasis dargestellt hat, lassen sich also alle Skalarprodukte sowie auch die Basisdarstellung eines beliebigen Vektors auf die einfachst denkbare Weise darstellen.

g) Komplexe trigonometrische Polynome

Wie im Reellen fixieren wir eine Periode $T > 0$ und setzen

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \,.$$

Definition: Ein komplexes trigonometrisches Polynom zur Periode T ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die sich mit einem geeigneten $N \in \mathbb{N}$ als

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k \cdot i\omega t}$$

schreiben läßt.

Aufgrund der EULERschen Beziehungen ist jedes reelle trigonometrische Polynom gleichzeitig ein komplexes, denn

$$\begin{aligned}
&a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell \sin \ell\omega t \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{e^{k\cdot i\omega t} + e^{-k\cdot i\omega t}}{2} + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell \frac{e^{\ell\cdot i\omega t} e^{-\ell\cdot i\omega t}}{2i} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{2} e^{k\cdot i\omega t} + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{2} e^{-k\cdot i\omega t} - i \sum_{\ell=1}^{M} \frac{b_\ell}{2} e^{\ell\cdot i\omega t} + i \sum_{\ell=1}^{M} \frac{b_\ell}{2} e^{-\ell\cdot i\omega t} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{k\cdot i\omega t} + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-k\cdot i\omega t} \,.
\end{aligned}$$

Schreibt man dies in der üblichen Weise als komplexes trigonometrisches Polynom $\sum c_k e^{k\cdot i\omega t}$, ist also

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \text{für } k > 0 \\ a_0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & \text{für } k < 0 \end{cases} .$$

Insbesondere sind c_k und c_{-k} dann für alle k komplex konjugiert zueinander; c_0 ist reell und somit zu sich selbst konjugiert.

Ist umgekehrt für ein komplexes trigonometrisches Polynom $c_k = \overline{c_{-k}}$ für alle k, so ist mit $c_k = d_k + ie_k$ und $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
c_k e^{k\cdot i\omega t} + c_{-k} e^{-k\cdot i\omega t} &= d_k\left(e^{k\cdot i\omega t} + e^{-k\cdot i\omega t}\right) + ie_k\left(e^{k\cdot i\omega t} - e^{-k\cdot i\omega t}\right) \\
&= 2d_k \cos k\omega t - 2e_k \sin k\omega t \,,
\end{aligned}$$

die Funktion läßt sich also auch als reelles trigonometrisches Polynom schreiben mit

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_0 \\
a_k &= 2\,\mathfrak{Re}\, c_k \quad \text{für } k \geq 1 \,. \\
b_\ell &= -2\,\mathfrak{Im}\, c_\ell
\end{aligned}$$

Auch auf dem Vektorraum aller komplexer trigonometrischer Polynome betrachten wir natürlich das Produkt

$$(f,\, g) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

und berechnen als Beispiel das Produkt zweier Basisfunktionen:

$$\begin{aligned}(e^{k\cdot i\omega t},\, e^{\ell\cdot i\omega t}) &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{k\cdot i\omega t}\overline{e^{\ell\cdot i\omega t}}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{k\cdot i\omega t}\, e^{-\ell\cdot i\omega t}\, dt\\ &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{(k-l)\cdot i\omega t}\, dt\,.\end{aligned}$$

Für $k = \ell$ ist der Integrand gleich eins, das Integral also gleich T und das Skalarprodukt gleich eins.

Für $k \neq \ell$ ist der Integrand eine echte Exponentialfunktion; wie wir aus Abschnitt *b)* wissen, berechnet sich ihre Stammfunktion nach derselben Formel wie im Reellen, d.h.

$$\int_0^T e^{(k-\ell)\cdot i\omega t}\, dt = \frac{1}{k-\ell} e^{(k-\ell)\cdot i\omega t}\,\Big|_0^T = \frac{1}{k-\ell}(e^0 - e^{(k-\ell)\cdot i\omega T}) = 0\,,$$

da $\omega T = 2\pi$ ist. Also ist

$$(e^{k\cdot i\omega t},\, e^{\ell\cdot i\omega t}) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = \ell\\ 0 & \text{für } k \neq \ell\end{cases}\,.$$

Lemma: Mit obigem Produkt wird der Vektorraum aller komplexer trigonometrischer Polynome der Periode T zu einem HERMITEschen Vektorraum. Die Funktionen $e^{k\cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ bilden eine Orthonormalbasis dieses Vektorraums.

Beweis: Die verlangten Linearitäts- und Symmetrieeigenschaften folgen aus der Linearität der Integration und deren Vertauschbarkeit mit

der komplexen Konjugation. Für die positive Definitheit beachte man, daß $f(t)\overline{f(t)}$ eine stetige reellwertige Funktion ist, die keine negativen Werte annimmt. Für solche Funktionen wissen wir aus Kapitel 2, §1*a)*, daß ihr Integral über ein endliches Intervall nichtnegativ ist und genau dann verschwindet, wenn die Funktion im gesamten Intervall identisch verschwindet.

Die Behauptung über die Orthonormalbasis schließlich folgt sofort aus den gerade berechneten Produkten.

■

Korollar: Ist f ein komplexes trigonometrisches Polynom, so ist

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k\cdot i\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = (f,\, e^{k\cdot i\omega t}) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\, dt\,.$$

(Die Summe in diesem Korollar ist endlich, da alle bis auf endlich viele Koeffizienten verschwinden.)

Beweis: Nach Definition eines komplexen trigonometrischen Polynoms ist f darstellbar als Linearkombination endlich vieler Funktionen $e^{k\cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Da diese Funktionen Teil einer Orthonormalbasis sind, ist der jeweilige Koeffizient gleich

$$(f,\, e^{k\cdot i\omega t}) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\, dt\,,$$

und da jede Basisfunktion $e^{\ell\cdot i\omega t}$, die nicht in der Linearkombination vorkommt, zu jeder Basisfunktion in der Linearkombination orthogonal ist, verschwindet $(f, e^{\ell\cdot i\omega t})$ für jede solche Funktion.

■

Falls wir wieder ohne Rücksicht auf Konvergenzprobleme N gegen unendlich gehen lassen, führt uns auch dies wieder auf die Definition der komplexen FOURIER-Reihe, auf die wir in Abschnitt *a)* auf dem Umweg über reelle FOURIER-Reihen gekommen waren.

h) Das Hermitesche Produkt auf $L_T(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ und die Besselsche Ungleichung

Im vorigen Abschnitt hatten wir auf dem Vektorraum aller komplexer trigonometrischer Polynome ein HERMITEsches Skalarprodukt definiert durch die Festsetzung

$$(f,\ g) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt\,.$$

Zumindest *definieren* können wir $(f,\ g)$ auch für beliebige Funktionen $f, g \in L_T(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$. Sowohl die Linearitätseigenschaft als auch die HERMITEsche Symmetrie zeigt man genauso wir dort, und auch die Forderung

$$(f,\ f) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad f \in L_T(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$$

ist trivialerweise erfüllt. Probleme gibt es allerdings mit der positiven Definitheit: Für die Funktion f, die bei allen Vielfachen der Periode T den Wert eins annimmt und sonst überall verschwindet, ist $(f,\ f) = 0$, aber die Funktion ist nicht gleich der Nullfunktion.

Wir sprechen daher nicht von einem HERMITEschen Skalarprodukt, sondern nur von einem HERMITEschen Produkt; wie sich zeigen wird, ist es auch ohne die Definitheitseigenschaft recht nützlich.

Als erste Anwendung beweisen wir die BESSELsche Ungleichung:

Lemma: Für die FOURIER-Koeffizienten $c_k = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\,dt$ einer Funktion $f \in L_T(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\overline{c_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{f(t)}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\ dt\,;$$

insbesondere konvergiert die linke Summe also.

Beweis: Die rechte Seite der Ungleichung ist gerade das HERMITEsche Produkt $(f,\ f)$, und auch die FOURIER-Koeffizienten lassen sich als Produkte

$$c_k = (f,\ e^{k\cdot i\omega t})$$

schreiben. Wir wollen noch einige weitere Produkte ausrechnen.

Zunächst definieren wir die Teilsumme

$$S_N(t) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t}\,.$$

Dies ist ein trigonometrisches Polynom, und wir wissen daher schon aus §2*a)*, daß

$$(S_N,\ S_N) = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2$$

ist.

Als nächstes betrachten wir das Produkt

$$(f - S_N,\ f - S_N) = (f,\ f) - (S_N,\ f) - (f,\ S_N) + (S_N,\ S_N)\,.$$

Auch wenn das HERMITEsche Produkt auf $L_T(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ nicht positiv definit ist, wissen wir doch, daß die linke (und damit auch die rechte) Seite zumindest nichtnegativ ist.

Wegen der Linearität des HERMITEschen Produkts im ersten Argument ist weiter

$$\begin{aligned}
(S_N,\ f) &= \left(\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t},\ f\right) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \left(e^{k\cdot i\omega t},\ f\right) \\
&= \sum_{k=-N}^{N} c_k\overline{(f,\ e^{k\cdot i\omega t})} = \sum_{k=-N}^{N} c_k\overline{c_k} = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \\
&= (S_N,\ S_N)\,,
\end{aligned}$$

und da dies eine reelle Zahl ist, folgt auch

$$(f,\ S_N) = \overline{(S_N,\ f)} = (S_N,\ f) = (S_N,\ S_N)\,.$$

Fassen wir alles zusammen, ist also

$$0 \leq (f - S_N,\ f - S_N) = (f,\ f) - (S_N,\ S_N)$$

und damit

$$(S_N,\ S_N) \leq (f, f) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Ausgeschrieben wird das zu

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \le \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt \quad \text{für alle} \quad n\in\mathbb{N}\,,$$

und der Grenzübergang $N\to\infty$ führt zur gewünschten Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \le \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt\,,$$

wie behauptet. ∎

FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784–1846) verließ die Schule schon im Alter von 14 Jahren und wurde Lehrling eines Handelshauses. Dessen Überseehandel veranlaßte ihn zur Beschäftigung mit Geographie, Spanisch und Englisch und schließlich (für die Navigation) mit Astronomie. Nachdem er 1804 die Bahn des HALLEYschen Kometen berechnet hatte, bekam er 1806 eine Stelle als Astronom eines privaten Observatoriums. Seine Beiträge zur Mathematik entstanden aus seinen astronomischen Berechnungen. 1809 wurde er zum Direktor des Königsberger Observatoriums und zum Professor der Astronomie ernannt.

Aufgrund der Beziehungen zwischen reellen und komplexen FOURIER-Reihen (für die genau dieselben Formeln gelten, wie sie in §2*a)* für trigonometrische Polynome hergeleitet wurden) folgt daß für die reelle FOURIER-Reihe einer reellwertigen Funktion gilt

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \le \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt\,.$$

Insbesondere konvergieren also auch die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell^2\,.$$

i) Harmonische Analyse als lineare Abbildung

Die BESSELsche Ungleichung zeigt, daß nicht alle Folgen reeller oder komplexer Zahlen als FOURIER-Koeffizienten eine stückweise stetigen Funktion auftreten können: Zumindest muß die Summe ihrer Betragsquadrate konvergieren.

Betrachten wir den Vektorraum

$$\ell^2(\mathbb{Z},\,\mathbb{C}) \underset{\text{def}}{=} \left\{ c\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c(k)|^2 < \infty \right\};$$

so muß also die Funktion $c\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ mit $c(k)=c_k$ in diesem Vektorraum liegen; wir haben somit eine Abbildung

$$\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{Z},\,\mathbb{C})\,,$$

die einer Funktion $f\in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ ihre FOURIER-Koeffizienten zuordnet.

Um den Zusammenhang zwischen Funktionen und Koeffizientenfolgen besser zu verdeutlichen, definieren wir für $f\in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ die Funktion

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \mathbb{Z}\to\mathbb{C} \\ k\mapsto \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\,dt \end{cases};$$

$\widehat{f}(k)$ ist also gerade der k-te FOURIER-Koeffizient von f.

Lemma: Die Zuordnung $f\mapsto\widehat{f}$ definiert eine lineare Abbildung von $\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ nach $\ell^2(\mathbb{Z},\,\mathbb{C})$.

Der *Beweis* ist trivial wegen der Linearität der Integration. ∎

Als nächstes definieren wir auf $\ell^2(\mathbb{Z},\,\mathbb{C})$ ein HERMITEsches Skalarprodukt durch die Vorschrift

$$(c,\,d) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\overline{d_k}\,.$$

Wir müssen zeigen, daß dies erstens wohldefiniert ist, daß die Summe also überhaupt konvergiert, und daß es zweitens alle Forderungen an ein HERMITEsches Skalarprodukt erfüllt.

Da für zwei komplexe Zahlen z und w ist $\big(|z|-|w|\big)^2 \geq 0$, also

$$|zw| = |z\overline{w}| \leq \frac{1}{2}\left(|z|^2 + |w|^2\right).$$

Für zwei Funktionen $c, d \in \ell^2(\mathbb{Z},\ \mathbb{C})$ ist daher für jede natürliche Zahl N

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=-N}^{N} c(k)\overline{d(k)}\right| &\leq \sum_{k=-N}^{N} \left|c(k)\overline{d(k)}\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=-N}^{N} |c(k)|^2 + \sum_{k=-N}^{N} |d(k)|^2\right).\end{aligned}$$

Nach Definition von $\ell^2(\mathbb{Z},\ \mathbb{C})$ konvergiert die rechte Seite für $N \to \infty$, also auch die linke.

Das Nachrechnen der Forderungen an ein HERMITEsches Skalarprodukt ist nun einfach: Abgesehen von der Tatsache, daß die Summen nicht mehr endlich sind, geht alles ganz genauso wie beim HERMITEschen Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$.

Mit diesem Skalarprodukt ausgedrückt bekommt die BESSELsche Ungleichung die kompakte Form

$$\left(\hat{f},\ \hat{f}\right) \leq (f,\ f) \quad \text{für alle} \quad f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\ \mathbb{C}).$$

§4: Konvergenz von Fourier-Reihen

Abgesehen von den beiden Beispielen der Rechteckschwingung und des Sägezahns wissen wir bislang noch von keiner FOURIER-Reihe, ob und gegebenenfalls wohin sie konvergiert. In diesem Paragraphen soll dies zumindest für stückweise differenzierbare Funktionen geklärt werden. Als zentral wird sich dabei eine neue Konstruktion herausstellen, die *Faltung zweier Funktionen.*

a) Faltungen

Definition: Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ bezeichnen wir die Funktion

$$f \star g(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

als (periodische) Faltung von f und g.

Anschaulich kann man sich die Faltung als eine Art Mittelung von g vorstellen mit einer Gewichtsfunktion f. Im zweidimensionalen (nichtperiodischen) Analogon kann man beispielsweise ein optisch defokusiertes Bild so beschreiben: Bei einer perfekten optischen Abbildung einer Ebene hängt jeder Bildpunkt von genau einem Punkt der Ebenen ab; ist das System aber defokusiert, so kommen auch noch Einflüsse der Nachbarpunkte dazu, die umso größer sind, je näher die Punkte beieinanderliegen. Eine Helligkeitsverteilung $f(s,t)$ wird dann abgebildet auf

$$F(s,t) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\left((s-\sigma)^2+(t-\tau)^2\right)/2a} f(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau\,,$$

wobei der Parameter a umso größer ist, je stärker das Bild defokusiert ist. Für kleines a ist der Effekt also eher ein Weichzeichnen als eine echte Unschärfe, und dieser Glättungseffekt ist ein allgemeines Charakteristikum von Faltungen:

Lemma: Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ ist $f \star g$ eine stetige Funktion.

(Man beachte, daß f und g beide nur als stückweise stetig vorausgesetzt sind!)

Beweis: Als stückweise stetige periodische Funktion ist g insbesondere beschränkt: Für jedes offene Intervall $(t_j,\ t_{j+1})$, in dem f stetig ist, müssen nach Definition der stückweisen Stetigkeit der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{\substack{t\to t_j\\ t>t_j}} g(t)$ und der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{\substack{t\to t_{j+1}\\ t<t_{j+1}}} g(t)$ existieren; damit kann die Einschränkung von g auf das offene Intervall $(t_j,\ t_{j+1})$ fortgesetzt werden zu einer stetigen Funktion auf dem

abgeschlossenen Intervall $[t_j,\, t_{j+1}]$ (die an den Intervallenden natürlich nicht mit g übereinstimmen muß). Damit hat der Betrag dieser Funktion ein endliches Maximum M_j, das auch eine Schranke für g im offenen Intervall $(t_j,\, t_{j+1})$ ist. Nimmt man nun als M das Maximum aller M_j sowie auch der Beträge $\left|g(t_j)\right|$ der Funktionswerte an den potentiellen Sprungstellen, so ist $|g(t)| \le M$ für alle $t \in [0,\, T]$ und damit auch für alle $t \in \mathbb{R}$.

Seien nun t_1 und t_2 Punkte aus $\mathbb{R}$; dann ist

$$\begin{aligned} |f \star g(t_1) - f \star g(t_2)| &\le \frac{1}{T}\int_0^T |f(t_1-\tau) - f(t_2-\tau)|\,|g(\tau)|\; d\tau \\ &\le \frac{M}{T}\int_0^T |f(t_1-\tau) - f(t_2-\tau)|\; d\tau\,. \end{aligned}$$

Das noch verbliebene Integral mißt die Fläche zwischen den Graphen von $f(t)$ und $f(t{+}t_2{-}t_1)$ über eine Periode von f; wegen der stückweisen Stetigkeit von f geht diese gegen null für $t_2 \to t_1$.

■

b) Die Fourier-Reihe einer Faltung

Die Nützlichkeit von Faltungen für FOURIER-Reihen ergibt sich aus folgender Formel:

Satz: : Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist

$$\widehat{f \star g}(k) = \widehat{f}(k)\cdot\widehat{g}(k) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{Z}\,;$$

die FOURIER-Koeffizienten der von $f \star g$ sind also gerade die Produkte der FOURIER-Koeffizienten von f mit denen von g.

Der *Beweis* erfolgt durch Nachrechnen: Der k-te FOURIER-Koeffizient c_k von $f \star g$ ist

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f\star g(t)e^{-k\cdot i\omega t}\,dt = \frac{1}{T^2}\int_0^T\left(\int_0^T f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right)e^{-k\cdot i\omega t}\,dt \\ &= \frac{1}{T^2}\iint\limits_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le\tau\le T}} f(t-\tau)g(\tau)e^{-k\cdot i\omega t}\,d\tau\,dt \\ &= \frac{1}{T^2}\iint\limits_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le\tau\le T}} f(t-\tau)e^{-k\cdot i\omega(t-\tau)}\cdot g(\tau)e^{-k\cdot i\omega\tau}\,dt\,d\tau \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)e^{-k\cdot i\omega(t-\tau)}\,dt\right)g(\tau)e^{-k\cdot i\omega\tau}\,d\tau\,. \end{aligned}$$

Der Inhalt der letzten Klammer kann mit Hilfe der Substitution $u = t-\tau$ im Integral berechnet werden:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)e^{-k\cdot i\omega(t-\tau)}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\tau}^{T-\tau} f(u)e^{-k\cdot i\omega u}\,du = \widehat{f}(k)\,,$$

denn wie wir uns schon überlegt haben, kommt es bei einer periodischen Funktion nicht darauf an, über welches Intervall der Länge T wir integrieren. Somit ist

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T \widehat{f}(k)\cdot g(\tau)e^{-k\cdot i\omega\tau}\,d\tau = \widehat{f}(k)\cdot\widehat{g}(k)\,,$$

wie behauptet.

■

Die FOURIER-Reihe von $f \star g$ ist also

$$S_{f\star g}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{k\cdot i\omega t}\,,$$

wobei

$$S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k\cdot i\omega t} \quad \text{und} \quad S_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{k\cdot i\omega t}$$

die FOURIER-Reihen von f und g sind.

Nach der BESSELschen Ungleichung konvergieren die Summen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_k|^2 \; ;$$

außerdem ist für jedes k

$$|c_k d_k| \le \frac{1}{2}\big(|c_k|^2 + |d_k|^2\big) \; ;$$

also konvergiert auch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k d_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|c_k d_k e^{k\cdot i\omega t}\right| \; .$$

(Man beachte, daß $\left|e^{k\cdot i\omega t}\right| = 1$ ist für jede reelle Zahl t.) Damit haben wir gezeigt, daß die FOURIER-Reihe von $f \star g$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Das hat eine wichtige Konsequenz:

Lemma: Konvergiert die FOURIER-Reihe einer Funktion h gleichmäßig gegen eine Funktion S_h, so ist S_h stetig und hat dieselben FOURIER-Koeffizienten wie h.

Beweis: Die FOURIER-Reihe von h sei

$$S_h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k\cdot i\omega t} \; .$$

Da alle Summanden $c_k e^{k\cdot i\omega t}$ stetige Funktionen sind, ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe auch die Summe eine stetige Funktion; deren k-ter FOURIER-Koeffizient ist

$$\widehat{S_h}(k) = \big(S_h,\, e^{k\cdot i\omega t}\big) = \lim_{N\to\infty} \sum_{\ell=-N}^{N} c_\ell \big(e^{\ell\cdot i\omega t}, e^{k\cdot i\omega t}\big) = c_k \; ,$$

wie behauptet. ∎

Insgesamt haben wir damit bewiesen

Satz: Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe von $f \star g$ absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion. Diese hat dieselben FOURIER-Koeffizienten wie $f \star g$. ∎

Damit wissen wir zwar immer noch nicht, *wohin* die FOURIER-Reihe von $f \star g$ konvergiert, aber wir wissen immerhin, *daß* sie für Funktionen, die als Faltungen darstellbar sind, konvergiert, und wir wissen auch, daß für die Differenz zwischen Ausgangs- und Grenzfunktion sämtliche FOURIER-Koeffizienten verschwinden. Wir müssen daher einerseits Funktionen mit verschwindenden FOURIER-Koeffizienten genauer untersuchen und andererseits versuchen, eine möglichst große Klasse von Funktionen als Faltungen darzustellen, auf die wir den gerade bewiesenen Satz anwenden können.

c) Faltung mit einem Sägezahn

Als erstes konkretes Beispiel (von dem sich zeigen wird, daß es zumindest einen Teil der zweiten Aufgabe lösen wird) betrachten wir für eine beliebige Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Faltung mit dem Sägezahn

$$s(t) = \frac{T}{2} - t \quad \text{für} \quad 0 < t < T \quad \text{und} \quad s(0) = 0 \, ,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T; es handelt sich hier um das Zweifache der in §2*c2)* betrachteten Funktion.

Für $t, \tau \in [0, T)$ liegt $t - \tau$ genau dann wieder in $[0, T)$, wenn $\tau \le t$ ist; andernfalls liegt $t - \tau$ im Intervall $(-T, 0)$, wo

$$s(t) = s(t+T) = \frac{T}{2} - (t+T) = -\frac{T}{2} - t$$

ist. Somit ist für $t, \tau \in (0, T)$

$$s(t-\tau) = \begin{cases} \frac{T}{2} - t + \tau & \text{für } \tau < t \\ 0 & \text{für } \tau = t \\ -\frac{T}{2} - t + \tau & \text{für } \tau > t \end{cases}$$

und $s \star f(t)$ ist gleich

$$\frac{1}{T}\int_0^T s(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^t \left(\frac{T}{2}-(t-\tau)\right) f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{T}\int_t^T \left(-\frac{T}{2}-(t-\tau)\right) f(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}\int_0^t f(\tau)\,d\tau - \frac{T}{2}\int_t^T f(\tau)\,d\tau + \int_0^T (\tau-t)f(\tau)\,d\tau\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau - \int_t^T f(\tau)\,d\tau\right) + \frac{1}{T}\int_0^T (\tau-t)f(\tau)\,d\tau\,.$$

Ist $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$, so ist der erste Summand gleich

$$\frac{1}{2}\big(F(t)-F(0)-F(T)+F(t)\big) = F(t) - \frac{F(0)+F(T)}{2}\,.$$

Auch das letzte Integral läßt sich durch partielle Integration weiter ausrechnen zu

$$\int_0^T (\tau-t)f(\tau)\,d\tau = (\tau-t)F(\tau)\Big|_0^T - \int_0^T F(\tau)\,d\tau$$

$$= (T-t)F(T) + tF(0) - \int_0^T F(\tau)\,d\tau$$

$$= t\big(F(0)-F(T)\big) + TF(T) - \int_0^T F(\tau)\,d\tau\,.$$

Insgesamt ist also

$$s\star f(t) = F(t) + t\big(F(0)-F(T)\big) - \frac{F(0)+F(T)}{2} + TF(T) - \int_0^T F(\tau)\,d\tau\,.$$

Abgesehen von dem Term $t\big(F(0)-F(T)\big)$ ist das eine Stammfunktion von $f(t)$, denn die drei hinteren Terme sind Konstanten, die nicht von t abhängen. Ist also insbesondere $F(T)=F(0)$, so ist $s\star f$ eine Stammfunktion von f. Dies wollen wir ausnützen, um differenzierbare Funktionen sowie eine leichte Verallgemeinerung davon als Faltungen auszudrücken um so die Konvergenz ihrer FOURIER-Reihen zu beweisen.

d) Fourier-Reihen stetiger stückweise differenzierbarer Funktionen

Definition: Eine stückweise stetige Funktion heißt stückweise differenzierbar, wenn es nur isolierte Punkte gibt, in denen f nicht stetig differenzierbar ist und wenn auch in diesen Ausnahmepunkten sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert von $\dot f(t)$ existieren.

Hier interessieren wir uns für periodische Funktionen; für diese bedeutet die Definition, daß es pro Periodenintervall höchstens endliche viele Punkte geben darf, in denen die Ableitung nicht definiert ist, aber auch dort muß sie einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert haben.

Einfache Beispiele stückweise differenzierbarer Funktionen sind die Rechteckschwingungen aus §2*b),* die überall außer in den Sprungstellen stetig differenzierbar sind und Ableitung null haben; in den Sprungstellen verschwindet daher auch sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert. Die Funktion ist aber trotzdem nicht differenzierbar in den Sprungstellen, da sie dort nicht einmal stetig ist. (Wäre f differenzierbar, so würde die Ableitung identisch verschwinden, die Funktion müßte also nach dem üblichen Argument über den Mittelwertsatz der Differentialrechnung konstant sein.)

Genauso ist beim Sägezahn aus §2*c)* die Ableitung überall außer in den Sprungstellen gleich -1; in den Sprungstellen ist die Funktion nicht differenzierbar, aber beide Grenzwerte der Ableitung sind gleich -1.

Weiteres Beispiel einer stetigen stückweise differenzierbaren Funktion ist etwa

$$f(t) = |t| \quad \text{für} \quad |t| \le 1\,,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode zwei. Für alle $t \notin \mathbb{Z}$ ist f differenzierbar; falls die größte ganze Zahl kleiner t gerade ist, ist die Ableitung +1, ansonsten -1. Bei einer geraden ganzen Zahl ist der linksseitige Grenzwert der Ableitung -1 und der rechtsseitige +1, bei einer ungeraden ist es umgekehrt.

Für eine stückweise differenzierbare Funktion können wir nicht wirklich von der abgeleiteten Funktion reden, da diese nicht in jedem Punkt existieren muß. Wir können aber eine Funktion $\varphi(t)$ definieren, die überall dort mit $\dot f(t)$ übereinstimmt, wo $\dot f(t)$ existiert; in den übrigen Punkten setzen wir $\varphi(t)$ auf irgendeinen beliebigen Wert, zum Beispiel auf null.

Die Funktion

$$\widetilde{f}(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau\,.$$

ist stetig und stückweise differenzierbar, und sie hängt nicht ab vom Wert von φ in den Ausnahmepunkten; ihre Ableitung stimmt dort, wo sie definiert ist, mit φ überein. Falls f stetig ist, unterscheidet sich $\widetilde{f}$ daher nur um eine Konstante von f, und auch f ist eine Stammfunktion von φ.

Setzen wir nun noch zusätzlich voraus, daß $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}\,\mathbb{C})$ periodisch ist, folgt aus der Rechnung im vorigen Abschnitt, daß sich $f(t)$ nur um eine Konstante vom Faltungsprodukt $s \star \varphi$ unterscheidet, denn

$$f(T) - f(0) = 0$$

für eine Funktion mit Periode T.

Aus Abschnitt *b)* wissen wir, daß die FOURIER-Reihe von $s \star \varphi$ wie auch von jeder anderen Faltung absolut und gleichmäßig konvergiert; da die Addition einer Konstanten hieran nichts ändert folgt also zusammen mit den übrigen Resultaten aus Abschnitt *b)*

Satz: Ist $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stetig und stückweise differenzierbar, konvergiert die FOURIER-Reihe von f absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion S_f, die dieselben FOURIER-Koeffizienten hat wie f. ■

e) Der Eindeutigkeitssatz

Auch wenn wir nun wissen, daß die FOURIER-Reihe zumindest für stetige stückweise differenzierbare Funktionen konvergiert, wissen wir noch nicht, wohin sie konvergiert. Diese Frage soll in diesem Abschnitt geklärt werden.

Beginnen wir mit dem einfachsten Fall einer Funktion, deren sämtliche FOURIER-Koeffizienten verschwinden, und die sich zudem noch einigermaßen anständig verhält: Bei einer stückweise stetigen Funktion existieren nach Definition in jedem Punkt die beiden Grenzwerte

$$f(t^+) \underset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{s\to t\\ s>t}} f(s) \quad \text{und} \quad f(t^-) \underset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{s\to t\\ s<t}} f(s)\,,$$

die überall dort, wo f stetig ist, miteinander und mit $f(t)$ übereinstimmen. Für die übrigen Punkte wollen wir verlangen, daß

$$f(t) = \frac{1}{2}\big(f(t+) + f(t-)\big)$$

der Mittelwert dieser beiden Werte ist.

Satz: Für $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ seien alle FOURIER-Koeffizienten null; außerdem sei in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{1}{2}\big(f(t^+) + f(t^-)\big)\,.$$

Dann ist $f(t) \equiv 0$.

Beweis: Auch hier arbeiten wir wieder mit einem Faltungsintegral, und zwar wollen wir versuchen, die Funktion f als Faltung von sich selbst mit einer geeigneten Funktion g auszudrücken; wir suchen also nach einer Funktion g, so daß $f \star g = f$ ist. Falls g diese Eigenschaft für *beliebige* Funktionen f haben soll, die durch ihre FOURIER-Reihe dargestellt werden, müssen dann alle FOURIER-Koeffizienten von g gleich eins sein, denn bei einer Faltung zweier Funktionen multiplizieren sich die FOURIER-Koeffizienten. g hat also die FOURIER-Reihe

$$S_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{k\cdot i\omega t} \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}\,,$$

was offensichtlich unmöglich ist: Nach der BESSELschen Ungleichung müßte sonst nämlich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1$$

konvergieren, was natürlich nicht der Fall ist.

Wir können aber eine kleine Modifikation dieser Reihe, betrachten, nämlich

$$I_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t} .$$

Hier sorgt der Exponent $|k|$ im Falle $|r| < 1$ für eine starke Dämpfung der Koeffizienten mit großem Index, so daß es zumindest mit der BESSELschen Ungleichung keine Probleme mehr gibt: Die entsprechende Summe ist zusammengesetzt aus zwei konvergenten geometrischen Reihen. Falls auch $I_r(t)$ selbst konvergiert, können wir damit rechnen und hoffen, daß wir irgendwann einmal den Grenzübergang $r \to 1$ machen können, was dann *ungefähr* der Faltung mit der nicht existenten Funktion g entspricht.

Wir berechnen $I_r(t)$ über zwei geometrische Reihen:

Beschränken wir uns zunächst auf positive Indizes, so ist nach der Summenformel

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t} = \frac{1}{1 - re^{i\omega t}} = \frac{1 - re^{-i\omega t}}{(1 - re^{i\omega t})(1 - re^{-i\omega t})}$$
$$= \frac{1 - r\cos\omega t + ir\sin\omega t}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t} .$$

Ersetzt man in einem der Summanden k durch $-k$, so ändert sich nichts am Koeffizienten $r^{|k|}$ und auch nichts am Realteil von $e^{k\cdot i\varphi}$; der Imaginärteil allerdings ändert sein Vorzeichen. Somit ist

$$\sum_{k=-\infty}^{0} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t} = \frac{1 - r\cos\omega t + ir\sin\omega t}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t}$$

der konjugiert komplexe Wert zu obiger Summe. Da wir für $k = 0$ den Summanden eins bekommen, der in beiden obigen Summen auftritt, ist also

$$I_r(t) = \frac{1 - r\cos\omega t + ir\sin\omega t}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t} + \frac{1 - r\cos\omega t - ir\sin\omega t}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t} - 1$$
$$= \frac{2 - 2r\cos\omega t}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t} - 1 = \frac{2 - 2r\cos\omega t - (1 + r^2 - 2r\cos\omega t)}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t}$$
$$= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t} .$$

Diese Funktion wollen wir uns für verschiedene Werte von r etwas genauer ansehen.

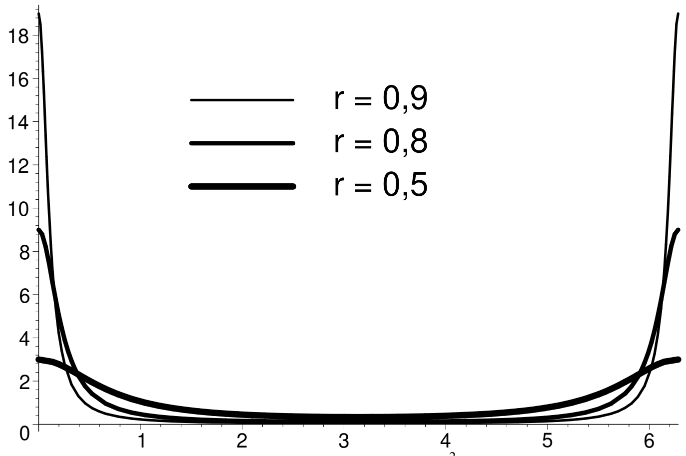


Abb. 13: $I_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}$

Abbildung 13 zeigt, daß sich I_r im offenen Intervall $(0, T)$ für $r \to 1$ immer stärker an die t-Achse annähert, wohingegen die Funktionswerte an den Intervallenden immer stärker ansteigen. In der Tat ist können wir für $0 < t < T$ beim Grenzübergang $r \to 1$ einfach einsetzen und erhalten

$$I_1(t) = \frac{1 - 1^2}{2 - 2\cos\omega t} = 0 .$$

Für $t = 0$ oder T verschwindet dagegen auch der Nenner, und

$$\lim_{r\to 1} I_r(0) = \lim_{r\to 1} I_r(T) = \lim_{r\to 1} \frac{1-r^2}{1+r^2-2}$$
$$= \lim_{r\to 1} \frac{(1+r)(1-r)}{(1-r)^2} = \lim_{r\to 1} \frac{(1+r)}{(1-r)} = \infty\,.$$

Die Fläche unter der Kurve I_r im Intervall $[0, T]$ ist

$$\int_0^T \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\omega t}\,dt\,,$$

ein nicht sehr angenehm aussehendes Integral.

Die Mathematik stellt allerdings seit über hundert Jahren Algorithmen zur Verfügung, mit denen sich nicht nur entscheiden läßt, ob Funktionen wie I_r eine elementar ausdrückbare Stammfunktion haben, sondern auch berechnen, wie diese Stammfunktion dann aussieht. In den gängigen Computeralgebrasystemen sind diese Algorithmen zumindest teilweise implementiert, und wenn es auch zu weit führen würde, hier zu erklären, wie man eine Stammfunktion des Integranden

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\omega t}$$

findet, läßt sich doch das Ergebnis

$$F_r(t) = -\frac{2}{\omega}\arctan\left(\frac{r+1}{r-1}\tan\frac{\omega t}{2}\right) + C$$

leicht verifizieren: Nach der Kettenregel ist zunächst

$$\frac{d}{dt}\arctan\left(a\tan\frac{\omega t}{2}\right) = \frac{1}{1+a^2\tan^2\frac{\omega t}{2}}\cdot\frac{a\omega}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\omega t}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{a\omega}{\cos^2\frac{\omega t}{2}+a^2\sin^2\frac{\omega t}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\omega}{1+(a^2-1)\sin^2\frac{\omega t}{2}}\,.$$

Mit der Beziehung

$$\sin^2\frac{\omega t}{2} = \frac{1-\cos\omega t}{2}$$

wird das zu

$$\frac{1}{2}\,\frac{a\omega}{1+\frac{a^2-1}{2}-\frac{a^2-1}{2}\cos\omega t} = \frac{a\omega}{(a^2+1)-(a^2-1)\cos\omega t}\,.$$

Für $a = \dfrac{r+1}{r-1}$ ist $a^2+1 = 2\cdot\dfrac{r^2+1}{(r-1)^2}$ und $a^2-1 = \dfrac{4r}{(r-1)^2}$, also wird der Ausdruck zu

$$\frac{\frac{r+1}{r-1}\cdot\omega}{2\cdot\frac{r^2+1}{(r-1)^2}-\frac{4r}{(r-1)^2}\cos\omega t} = \frac{(r^2-1)\omega}{2(r^2+1)-4r\cos\omega t}\,.$$

Um die Ableitung von F_r zu berechnen, müssen wir das noch mit $-2/\omega$ multiplizieren, was genau den Integranden ergibt. Somit ist F_r eine Stammfunktion von I_r.

Daß es mit dieser Stammfunktion ein Problem gibt, sieht man spätestens dann, wenn man naiv einsetzt und auf

$$\int_0^T I_r(t)\,dt = F_r(T) - F_r(0) = 0 - 0 = 0$$

kommt, denn aus geometrischen Gründen ist völlig klar, daß das Integral für $r < 1$ positiv sein muß.

Das Problem ist natürlich die Singularität des Tangens im Punkt $\frac{\pi}{2}$: Für $t = \frac{T}{2}$ ist F_r nicht definiert, da der Tangens dort gegen plus oder minus unendlich geht – je nachdem, von welcher Seite wir kommen. Damit ist F_r keine auf dem ganzen Integrationsintervall definierte Stammfunktion, und das Integral kann nicht einfach durch Einsetzen der oberen und der unteren Grenze berechnet werden.

Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von F_r existieren allerdings auch für $t = \frac{T}{2}$:

Für $0 < t < \frac{T}{2}$ ist $\tan\frac{\omega t}{2}$ positiv und geht gegen $+\infty$ für $t \to \frac{T}{2}$. Da der Faktor vor dem Tangens für alle $r \in (-1, 1)$ negativ ist, folgt

$$\lim_{\substack{t\to T/2\\ t<T/2}} F_r(t) = -\frac{2}{\omega}\lim_{u\to-\infty}\arctan u = -\frac{2}{\omega}\,\frac{-\pi}{2} = \frac{T}{2}\,.$$

Für $\frac{T}{2} < t < T$ dagegen ist $\tan\frac{\omega t}{2}$ negativ und geht gegen $-\infty$ für $t \to \frac{T}{2}$. Somit ist

$$\lim_{\substack{t\to T/2\\ t>T/2}} F_r(t) = -\frac{2}{\omega}\lim_{u\to\infty}\arctan u = -\frac{2}{\omega}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{T}{2}\,.$$

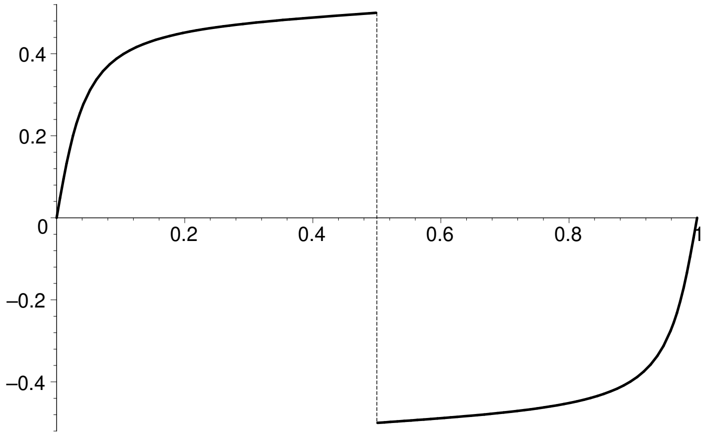


Abb. 14: $F_r(t)$ für $r = 0{,}8$ und $T = 2$

Abbildung 14 zeigt die Funktion F_r mit ihrer Sprungstelle in der Intervallmitte.

Zur Berechnung des Integrals von I_4 über eine Periode spalten wir es auf in zwei Teilintegrale über Intervalle, in denen wir eine Stammfunktion haben, und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^T I_r(t)\,dt &= \int_0^{\frac{T}{2}} I_r(t)\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^T I_r(t)\,dt\\ &= \lim_{\substack{t\to T/2\\ t<T/2}} F_r(t) - F_r(0) + F_r(T) - \lim_{\substack{t\to T/2\\ t>T/2}} F_r(t)\\ &= \frac{T}{2} - 0 + 0 + \frac{T}{2} = T\,.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_r(t)\,dt = 1 \quad \text{für alle} \quad r \in (-1,\,1)$$

und

$$\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_r(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^T I_r(t)\,dt = \frac{1}{2}\,.$$

Lassen wir nun r gegen eins gehen, ändert sich natürlich nichts an diesen Formeln, aber die beiden Integrale konzentrieren sich immer mehr auf die Umgebung von $t = 0$ *bzw.* $t = T$. Damit ist anschaulich ziemlich klar, daß für eine Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 1} I_r \star f(t) &= \lim_{r\to 1}\frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)I_r(\tau)\,d\tau\\ &= \lim_{r\to 1}\frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} f(t-\tau)I_r(\tau)\,d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^T f(t-\tau)I_r(\tau)\,d\tau\right)\\ &= \frac{1}{2}\big(f(t^-) + f(t^+)\big)\,,\end{aligned}$$

denn für $r \to 1$ geht $I_r(t)$ gegen null für alle t im Integrationsbereich außer $t = 0$ und $t = T$. Auf die genauen Abschätzungen zum Beweis dieser Aussage sei verzichtet.

Stattdessen wenden wir die Aussage an auf die Funktion f aus dem Satz; dafür besagt sie, daß

$$\lim_{r\to 1} I_r \star f(t) = f(t) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Für $|r| < 1$ ist

$$I_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{k\cdot i\omega t}$$

absolut und gleichmäßig konvergent; deshalb kann die Summation mit Integration vertauscht werden und wir erhalten für $I_r \star f$ auch den Ausdruck

$$\begin{aligned} I_r \star f(t) &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t}\cdot \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau) e^{-k\cdot i\omega\tau}\,d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t}\cdot \widehat{f}(k)\,. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung alle FOURIER-Koeffizienten von f verschwinden, ist also $I_r \star f(t) = 0$ für alle r vom Betrag kleiner eins. Damit ist aber auch

$$f(t) = \lim_{r\to 1} I_r \star f(t) = 0 \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

wie behauptet. ∎

Das war ein langer Beweis für eine nicht sonderlich aufregende Aussage; der Satz hat jedoch weitreichende Konsequenzen:

Eindeutigkeitssatz: Haben zwei Funktionen $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dieselben FOURIER-Koeffizienten, so unterscheiden sie sich höchstens an Unstetigkeitsstellen.

Beweis: Wir definieren zwei neue Funktion

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{2}\bigl(f(t^+) + f(t^-)\bigr) \quad \text{und} \quad \widetilde{g}(t) = \frac{1}{2}\bigl(g(t^+) + g(t^-)\bigr)\,;$$

dann unterscheiden sich f von $\widetilde{f}$ und g von $\widetilde{g}$ höchstens in den Unstetigkeitsstellen von f *bzw.* g. Insbesondere haben f und $\widetilde{f}$ sowie g und $\widetilde{g}$ dieselben FOURIER-Koeffizienten, also auch $\widetilde{f}$ und $\widetilde{g}$.

Somit erfüllt $\widetilde{f} - \widetilde{g}$ alle Voraussetzungen des gerade bewiesenen Satzes, verschwindet also identisch. Damit ist $\widetilde{f} = \widetilde{g}$; die ursprünglichen Funktionen f und g unterscheiden sich davon höchstens in ihren jeweiligen Unstetigkeitsstellen. ∎

Speziell können wir diesen Satz anwenden auf eine stetige stückweise differenzierbare Funktion f: Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir, daß deren FOURIER-Reihe absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion S_f konvergiert, die dieselben FOURIER-Koeffizienten wie f hat. Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt also

Satz: Die FOURIER-Reihe einer stetigen stückweise differenzierbaren Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert absolut und gleichmäßig gegen f. ∎

Kombinieren wir dies mit den speziellen Beispielen aus §2*c),* so erhalten wir den folgenden

Hauptsatz: $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sei stückweise stetig differenzierbar.
a) Ist f in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig, so konvergiert die FOURIER-Reihe dort gleichmäßig gegen f.
b) In jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die FOURIER-Reihe gegen

$$\frac{1}{2}\bigl(f(t^+) + f(t^-)\bigr)\,.$$

c) In jeder Sprungstelle von f tritt das GIBBS-Phänomen auf, d.h. die Teilsummen der FOURIER-Reihe überschwingen den Sprung um einen Faktor, der asymptotisch gegen $\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Si}(\pi) \approx 1{,}178979744$ konvergiert.

Beweis: Für stetiges f ist *a)* klar nach dem vorigen Satz und sowohl *b)* als auch *c)* sind auch klar, da es keine Sprungstellen gibt, so daß der Wert in *b)* immer gleich $f(t)$ ist.

Für unstetiges f seien $t_1, \ldots, t_r$ die Unstetigkeitsstellen im Intervall $[0, T)$; die Sprunghöhen dort seien

$$a_i \underset{\text{def}}{=} f(t_i^-) - f(t_i^+)\,.$$

Mit der aus §3*c2)* bekannten Sägezahnschwingung

$$s(t) = \begin{cases} \frac{T}{4} - \frac{t}{2} & \text{für } 0 < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}\,,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T, ist dann

$$s_i(t) \underset{\text{def}}{=} \frac{2a_i}{T} s(t - t_i)$$

eine weitere stückweise differenzierbare Funktion, die ebenfalls Sprunghöhe a_i an der Stelle t_i hat. Also ist auch

$$\widetilde{f}(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{r} s_j(t)$$

eine stückweise differenzierbare Funktion, die nun aber *keine* Sprungstellen mehr hat; $\widetilde{f}$ ist also stetig und erfüllt daher alle Behauptungen des Satzes.

Für die Funktion s haben wir die drei Behauptungen des Satzes in §2*d)* und *e)* explizit nachgerechnet; da sie unter Verschiebung und Reskalierung invariant sind, gelten sie auch für die Funktionen s_i. Damit gelten sie aber auch für

$$f(t) = \widetilde{f}(t) + \sum_{j=1}^{r} s_j(t) ,$$

wie behauptet.

■

Da praktisch alle Funktionen, deren FOURIER-Reihen man in technischen Anwendungen betrachtet, stückweise differenzierbar sind, wollen wir es für die punktweise Konvergenz bei diesem Satz bewenden lassen; für sonstige stückweise stetige Funktionen wollen wir uns im nächsten Abschnitt mit einer schwächeren Konvergenzaussage begnügen.

f) Der Satz von Parseval

Im Zusammenhang mit der BESSELschen Ungleichung haben wir bereits die HERMITEschen Produkte in $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ miteinander verglichen; jetzt wollen wir sehen, daß sie dieselben Werte liefern. Auch hierbei arbeiten wir mit Faltungen; wesentliches Hilfsmittel ist der folgende, implizit schon im vorigen Abschnitt verwendete

Satz: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe von $f \star g$ überall gleichmäßig gegen $f \star g$; sind $c_k = \widehat{f}(k)$ und $d_k = \widehat{g}(k)$ die FOURIER-Koeffizienten von f und g, ist also für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$f \star g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{-k \cdot i\omega t} .$$

■

Aus diesem Satz lassen sich sehr einfach Eigenschaften der Faltung ableiten, z.B. gilt

Lemma: *a)* Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $f \star g = g \star f$
b) Für $f, g, h \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$

Beweis: Betrachtet man die FOURIER-Reihen, werden die Behauptungen einfach zum Kommutativ- und Assoziativgesetz der Multiplikation komplexer Zahlen.

■

(Man könnte das Lemma natürlich auch direkt durch Integration beweisen.)

Wir wollen den obigen Satz verwenden, um folgende Formel zu beweisen:

Satz von Parseval: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist

$$(f,\, g) = \left(\widehat{f},\, \widehat{g}\right) ,$$

d.h. für die FOURIER-Koeffizienten c_k von f und d_k von g ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\overline{g(t)}\, dt .$$

Zum *Beweis* brauchen wir eine Funktion, deren FOURIER-Koeffizienten die Zahlen $\overline{d_k}$ sind. Komplexe Konjugation der FOURIER-Reihe zu g führt zu

$$\overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{k \cdot i\omega t}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k e^{k \cdot i\omega t}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k} e^{-k \cdot i\omega t} .$$

Ersetzen wir hierin noch t durch $-t$, erhalten wir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k} e^{k \cdot i\omega t}$$

als FOURIER-Reihe von $\widetilde{g}(t) = \overline{g(-t)}$.

Somit ist $f \star \widetilde{g}$ eine Funktion mit FOURIER-Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k} e^{k \cdot i\omega t} .$$

Da die FOURIER-Reihe einer Faltung stets gleichmäßig konvergiert und dieselben FOURIER-Koeffizienten hat wie die Faltung selbst, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz des vorigen Abschnitts, daß diese Reihe in jedem Punkt t gegen $f \star \widetilde{g}(t)$ konvergiert. Speziell für $t = 0$ ist daher einerseits

$$f \star \widetilde{g}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

und andererseits

$$f \star \widetilde{g}(0) = \widetilde{g} \star f(0) = \frac{1}{T} \int_0^T \widetilde{g}(-\tau) f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) \overline{g(\tau)}\, d\tau .$$

Damit ist der Satz bewiesen. ■

Korollar: Sind $c_k = \widehat{f}(k)$ die FOURIER-Koeffizienten von f, so ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt .$$

Gelegentlich wird auch dieses Korollar als Satz von PARSEVAL bezeichnet.

Der französische Mathematiker MARC-ANTOINE PARSEVAL DES CHÊNES (1755–1836) publizierte nur fünf mathematische Arbeiten; die 1799 veröffentlichte zweite davon enthält den hier betrachteten Satz.
Als überzeugter Royalist kam PARSEVAL während der französischen Revolution 1792 ins Gefängnis; später mußte er aus Frankreich fliehen, weil ihn NAPOLEON wegen regimekritischer Gedichte verhaften lassen wollte.

Obiges Korollar liefert oft interessante spezielle Werte unendlicher Reihen: Für den Sägezahn mit Periode 2π etwa ist im Intervall $(0, 2\pi)$

$$s(t) = \frac{\pi - t}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2ki} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

mit

$$c_k = \begin{cases} -\frac{i}{2k} & \text{für } k > 0 \\ 0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{i}{2k} & \text{für } k < 0 \end{cases} .$$

Somit ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} .$$

Außerdem ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = \frac{1}{8\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{12} .$$

Somit ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Der Satz von PARSEVAL liefert auch schnell die im vorigen Abschnitt angekündigte schwächere Konvergenzaussage für beliebige stückweise stetige periodische Funktionen: Mit dem HERMITEschen Produkt in $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ können wir in der üblichen Weise eine Norm

$$\|f\|_{2,T} = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt}$$

definieren und sagen, eine Folge $f_1, f_2, \ldots$ konvergiere in der L^2-Norm gegen f, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{2,T} = 0$$

ist. Dann gilt:

Satz: Für jedes $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe in der L^2-Norm gegen f.

Beweis: Wie wir beim Beweis der BESSELschen Ungleichung gesehen haben, gilt mit $c_k = \widehat{f}(k)$ für die Teilsumme

$$S_N = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t},$$

daß

$$\|f - S_N\|_{2,T}^2 = (f - S_N,\ f - S_N) = (f,\ f) - \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 .$$

Nach dem Satz von PARSEVAL geht die rechts stehende Differenz für $N \to \infty$ gegen null, also auch $\|f - S_N\|_{2,T}$. ■

g) Hilbert-Räume

In §2 hatten wir das Problem der harmonischen Analyse verglichen mit dem Problem, einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ bezüglich einer Orthonormalbasis darzustellen; die einfachste Lösung besteht bekanntlich darin, die Skalarprodukte von $\vec{v}$ mit den Basisvektoren $\vec{b}_i$ zu bilden; dann ist

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{v} \cdot \vec{b}_k)\, \vec{b}_k .$$

Genauso haben wir nun bei der Berechnung einer komplexen FOURIER-Reihe einer Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Skalarprodukte $c_k = (f, e^{k\cdot i\omega t})$ gebildet für alle ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ und gesehen, daß zumindest für stückweise differenzierbare Funktionen für die in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ die Mittelwertbedingung

$$f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

erfüllt ist,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{k\cdot i\omega t}$$

ist, eine sehr ähnliche Situation also.

Es gibt allerdings einen entscheidenden Unterschied: Im Gegensatz zur endlichen Summe oben haben wir hier eine Summe, in der im allgemeinen unendlich viele der Summanden von Null verschieden sind. Eine solche unendliche Summe kann nur sinnvoll definiert werden, wenn wir einen Konvergenzbegriff haben, wie dies etwa in $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ der Fall ist; über Körpern wie $\mathbb{Q}$ oder auch über endlichen Körpern hätten unendliche Summen überhaupt keine sinnvolle Interpretation.

In der linearen Algebra verlangt man daher aus gutem Grund von einer Basis, daß sich alle Vektoren als *endliche* Linearkombinationen von Basisvektoren darstellen lassen, auch wenn die Basis selbst unendlich sein kann.

Aus diesem Grund bilden die Funktionen $e^{k\cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ keine Basis von $\mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, und sie sind auch keine Basis des Untervektorraums aus allen stückweise differenzierbaren Funktionen mit der Mittelwerteigenschaft: Sie bilden nur eine Basis des sehr viel kleineren Untervektorraums der (komplexen) trigonometrischen Polynome. Der in §2*b)* betrachtete Rechteckimpuls f mit Periode T gehört bereits nicht mehr zu diesem Untervektorraum und ist in der Tat linear unabhängig von den Funktionen $e^{k\cdot i\omega t}$: Andernfalls gäbe es nämlich eine nichttriviale endliche Linearkombination

$$\lambda_0 f(t) + \lambda_1 e^{k_1\cdot i\omega t} + \cdots + \lambda_r e^{k_r\cdot i\omega t} = 0\,,$$

in der λ_0 nicht verschwinden darf, da sonst die $e^{k\cdot i\omega t}$ linear abhängig wären.

Also ist

$$f(t) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} e^{k_1\cdot i\omega t} + \cdots - \frac{\lambda_r}{\lambda_0} e^{k_r\cdot i\omega t}\,,$$

und das ist offensichtlich eine FOURIER-Reihe von f. Da wir die FOURIER-Reihe

$$f(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sin(2\ell+1)\omega t}{2\ell+1} = -\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{i}{4\ell+2} e^{(2\ell+1)\cdot i\omega t}$$

bereits kennen, wissen wir aber nach dem Eindeutigkeitssatz, daß das nicht stimmen kann.

Wenn wir die reinen Schwingungen zu einer Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ergänzen wollen, können wir also beispielsweise den Rechteckimpuls als neues Basiselement dazunehmen und, wie man sich leicht überlegt, auch noch den Sägezahn. Tatsächlich muß man noch eine ganze Reihe anderer Funktionen mit hinzunehmen, und bis heute hat es niemand geschafft, eine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ hinzuschreiben.

Der letzte Satz sollte zumindest diejenigen nicht verwundern, die sich aus dem letzten Semester noch an die dortige Diskussion im Zusammenhang mit der Existenz von Basen erinnern: Wir hatten dies nur für endlichdimensionale Vektorräume bewiesen, da es im unendlichdimensionalen Fall logische Schwierigkeiten gibt: Man muß das absolut nichtkonstruktive Auswahlaxiom benutzen, das zu allem Überfluß auch noch von den restlichen Axiomen der Mengenlehre unabhängig ist, so daß zumindest im Prinzip auch eine Mathematik ohne Auswahlaxiom möglich ist. Dort ist dann nicht beweisbar, daß jeder Vektorraum eine Basis hat – was freilich nicht bedeutet, daß nun beweisbar wäre, daß irgendein gegebener Vektorraum *keine* Basis hätte.

Von daher ist zumindest für alle praktischen Zwecke das System der Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ die beste Annäherung an eine Basis, die man bekommen kann.

Sie ist in vielfacher anderer Hinsicht eine Verallgemeinerung der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$: Beispielsweise besagt der Satz von PARSEVAL, daß wir den Abstand (bezüglich der L_2-Norm) zwischen zwei Funktionen, die beide bezüglich dieser Basis dargestellt sind, genauso ausrechnen können, wie wir das vom EUKLIDischen oder HERMITEschen Abstand her gewohnt sind – nur daß wir es jetzt eben mit einer unendlichen Summe von Quadraten zu tun haben.

Da eine solche Situation in Funktionenräumen alles andere als selten vorkommt und FOURIER-Reihen beileibe nicht die einzigen unendlichen Summen ihrer Art mit praktischer Bedeutung sind, hat die Mathematik hierfür einen Begriffsapparat nebst zugehörigen Techniken entwickelt, die wir hier in dieser Vorlesung zwar nicht unbedingt brauchen, die aber in manchen Gebieten beispielsweise der Signalverarbeitung oder der optischen Übertragungstechnik eine wichtige Rolle spielen, die Theorie der HILBERTräume:

Definition: Ein EUKLIDischer oder HERMITEscher Vektorraum V heißt HILBERT-Raum, wenn jede CAUCHY-Folge aus V gegen ein Element von V konvergiert.

DAVID HILBERT (1862–1943) wurde in Königsberg geboren, wo er auch zur Schule und zur Universität ging. Er promovierte dort 1885 mit einem Thema aus der Invariantentheorie, habilitierte sich 1886 und bekam 1893 einen Lehrstuhl. 1895 wechselte er an das damalige Zentrum der deutschen wie auch internationalen Mathematik, die Universität Göttingen, wo er bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1930 lehrte. Seine Arbeiten umfassen ein riesiges Spektrum aus unter anderem Invariantentheorie, Zahlentheorie, Geometrie, Funktionalanalysis, Logik und Grundlagen der Mathematik sowie auch zur Relativitätstheorie. Er gilt als einer der Väter der modernen Algebra.

Für unsere bislang betrachteten Räume nützt uns der Begriff des HILBERT-Raums leider nichts: Im Falle endlicher Dimension ist jeder EUKLIDische oder HERMITEsche Vektorraum ein HILBERT-Raum, denn wir können den Raum vermöge irgendeiner Orthonormalbasis mit $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{C}^n$ identifizieren und das CAUCHYsche Konvergenzkriterium komponentenweise anwenden. Von den unendlichdimensionalen Vektorräumen $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, die uns in Augenblick interessieren, ist leider keiner ein HILBERT-Raum, denn wie wir schon gesehen haben ist weder $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein EUKLIDischer noch $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ein HERMITEscher Vektorraum, da es stückweise stetige Funktionen gibt, deren Norm $\sqrt{(f, f)}$ verschwindet, ohne daß f die Nullfunktion wäre.

Dieses Problem wollen wir üblich weitgehend ignorieren; wir bezeichnen einfach für *jeden* $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum V mit einem Produkt, das bis auf die Forderung

$$(f, f) = 0 \Longrightarrow f \equiv 0$$

EUKLIDsch *bzw.* HERMITEsch ist, eine Teilmenge $H \subseteq V$ als HILBERT-*Raumbasis*, wenn es für jedes Element $f \in V$ eine Folge $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von

Elementen aus H und eine Folge $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gibt, so daß

$$\delta_n \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i h_i - f$$

für $N \to \infty$ die Eigenschaft hat, daß

$$\lim_{N\to\infty} (\delta_n,\ \delta_N) = 0$$

ist. Die Grenzwerte sind dabei natürlich bezüglich der L^2-Norm zu verstehen.

In diesem Sinne ist also das System der Funktionen $e^{k\cdot i\omega t}$ nach der Diskussion im vorigen Abschnitt eine HILBERT-Raumbasis von $L_T(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ und damit auch das System der Funktionen $1, \sin k\omega t,\ \cos \ell\omega t$ eine HILBERT-Raumbasis von $L_T(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$.

Solche HILBERT-Raumbasen sind in dieser Allgemeinheit leider noch nicht sonderlich nützlich für praktische Anwendungen: Will man einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ als Linearkombination von *irgendeiner* Basis $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ darstellen, muß man ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen in n Unbekannten lösen. Für endliches n ist das für große n zwar nicht mehr sehr angenehm, aber doch grundsätzlich möglich und per Computer auch noch für n in der Größenordnung von hundert Tausend durchaus praktikabel.

Wird die Dimension allerdings unendlich, so läßt sich ein System aus unendlich vielen Gleichungen in unendlich vielen Variablen nur in sehr speziellen Fällen wirklich lösen; einer davon ist der, den wir bei der Berechnung des FOURIER-Reihe ausgenutzt haben: Im Falle einer abzählbaren orthogonalen HILBERT-Raumbasis $\{\vec{b}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\vec{v}\cdot\vec{b}_i}{\vec{b}_i\cdot\vec{b}_i}$$

leicht berechenbar; noch einfacher wird es, wenn wir von einer orthonormalen HILBERT-Raumbasis ausgehen, da dann alle Nenner eins sind.

Solche orthogonale *bzw.* orthonormale HILBERT-Raumbasen bezeichnet man als *vollständige Orthogonalsysteme* bzw. *vollständige Orthonormalsysteme.*

h) Die Poisson-Formel

Der Konvergenzbeweis für FOURIER-Reihen war sehr abstrakt; in diesem Anschnitt wollen wir sehen, daß die Methoden, die wir dabei kennengelernt haben, auch nützlich sein können bei der Lösung eines praktischen Problems:

Bei bildgebenden Verfahren der Medizintechnik, bei Werkstoffuntersuchungen, Wärmeleitungsproblemen und vielen anderen Anwendungen hat man es oft mit folgendem *Randwertproblem* zu tun: Man kennt eine Funktion am Rand einer Fläche oder eines Volumens und möchte sie auch im (physikalisch oft unzugänglichen) Innern berechnen.

Sofern man keine einschränkenden Annahmen über die Funktion macht, ist dieses Problem natürlich weit von einer eindeutigen Lösbarkeit entfernt; in vielen interessanten Fällen ist es allerdings eindeutig lösbar.

Wir wollen hier nur ein ganz einfaches Beispiel betrachten: eine auf der Kreislinie bekannte Funktion, die ins Kreisinnere hinein fortgesetzt werden soll. Dabei wollen wir verlangen, daß die Funktion überall der *Kontinuitätsgleichung*

$$\Delta u = 0$$

genügt, wie das beispielsweise für elektrische Potentiale in Abwesenheit von Ladungen der Fall ist.

In Polarkoordinaten ausgedrückt ist der LAPLACE-Operator nach **[HM1]**, Kap. 2, §4*g)* gleich

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}\ ;$$

für $u(r,\varphi) = r^k \cos k\varphi$ und $u(r,\varphi) = r^k \sin k\varphi$ rechnet man leicht nach, daß $\Delta u = 0$ ist. Damit ist auch

$$\Delta(r^n e^{\pm k\cdot i\varphi}) = 0$$

und allgemeiner

$$\Delta u(r,\varphi) = 0 \quad \text{für} \quad u(r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t}\ ,$$

falls die Summe konvergiert. Für ein Randwertproblem ist die Funktion brauchbar, wenn zusätzlich auch noch

$$u_0(\varphi) \underset{\text{def}}{=} \lim_{r\to 1} u(r,\varphi)$$

für alle Winkel φ existiert.

Ein spezielles Beispiel einer konvergenten Summe ist die Funktion I_r aus Abschnitt *e);* wenn wir als Argument anstelle von ωt die Winkelvariable φ einsetzen, ist für $|r| < 1$

$$I_r(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\varphi} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\varphi}\,.$$

Da $I_r \star u_0$ für stetige Funktionen im Limes $r \to 1$ gerade u_0 ist, ist für eine vorgegebene Funktion u_0

$$u(r,\varphi) = I_r \star u_0(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)u_0(\psi)}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\psi)}\,d\psi$$

eine Fortsetzung ins Innere mit $\Delta u(r,\varphi) = 0$. Das ist die POISSONsche Integralformel zur Lösung dieses einfachen Randwertproblems.

SIMÉON DENIS POISSON (1781–1840) studierte zunächst Medizin, dann ab 1798 Mathematik an der *Ecole Polytechnique* bei LAPLACE und LAGRANGE. 1802 bekam er eine Stelle als Astronom am *Bureau des Longitudes,* 1809 wurde er Professor für reine Mathematik an der neugegründeten *Faculté des Sciences.* Er arbeitete hauptsächlich über bestimmte Integrale und FOURIER-Theorie, schrieb aber auch ein wichtiges Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie (in dem die POISSON-Verteilung erstmalig auftauchte) und Arbeiten über Mechanik, Astronomie, Elektrizität und Magnetismus.

§5: Die Fourier-Transformation

Die FOURIER-Transformation leistet für nichtperiodische Signale das, was FOURIER-Reihen für periodische Signale leisten; zur Herleitung ihrer Definition und ihrer wesentlichen Eigenschaften gehen wir daher aus von FOURIER-Reihen.

a) Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

In den vorigen Paragraphen haben wir periodische Funktionen mittels ihrer FOURIER-Reihen als Überlagerungen reiner Schwingungen dargestellt. Diese Zerlegung einer Funktion in Sinus- und Cosinusschwingungen verschiedener Frequenzen ist nicht nur für periodische Funktionen nützlich; angesichts der Tatsache, daß das Verhalten vieler elektronischer Bauteile von der Frequenz abhängt, würde man gerne *jede* Funktion entsprechend zerlegen. Es ist allerdings klar, daß FOURIER-Reihen, wie wir sie bislang kennen, dazu nicht geeignet sind, denn da dort alle beteiligten Frequenzen Vielfache eine festen Grundfrequenz sind, muß auch die Summe mindestens die der Grundfrequenz entsprechende Periode haben. Trotzdem liefern FOURIER-Reihen einen Ansatz auch für zumindest einige Klassen nichtperiodischer Funktionen.

Für eine beliebige reelle Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wählen wir dazu zunächst eine (große) Periode T und betrachten die Funktion $f_T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf dem Intervall $(-T/2,\, T/2]$ mit f übereinstimmt und dann periodisch mit Periode T auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Die FOURIER-Reihe von f_T ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ki\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = \widehat{f}_T(k) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ki\omega t}\,dt$$

und $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Um f selbst darzustellen, müssen wir T gegen unendlich gehen lassen; um das Verhalten von c_k bei Veränderung von T kontrollieren zu können, definieren wir dazu eine Funktion $C(\nu)$ als

$$C(\nu) \underset{\text{def}}{=} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\nu t}\,dt\,.$$

Mit dieser Definition ist

$$c_k = \frac{1}{T}C(k\omega) = \frac{\omega}{2\pi}C(k\omega)\,,$$

und die FOURIER-Reihe von f_T läßt sich schreiben als

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k\omega)e^{i(k\omega)t}\omega\,.$$

Wäre dies eine endliche Summe, etwa

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} C(k\omega)e^{i(k\omega)t}\omega\,,$$

so könnten wir sie auffassen als RIEMANN-Summe für

$$\int_{-N\omega}^{(N+1)\omega} \frac{1}{2\pi}C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu$$

bei einer äquidistanten Unterteilung mit Intervallbreite ω. Falls also ω gegen Null geht (und damit $T = 2\pi/\omega$ gegen unendlich) und gleichzeitig N gegen unendlich, konvergiert die FOURIER-Reihe gegen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu\,,$$

sofern dieses existiert.

Im Idealfall sollte also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu \quad \text{mit} \quad C(\nu) \underset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\nu t}\,dt$$

und wir definieren

Definition: Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \omega \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt \end{cases},$$

so sie existiert, als FOURIER-Transformierte von f.

Damit sollte dann also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,,$$

und diese Konstruktion, die f aus $\widehat{f}$ rekonstruiert, heißt *inverse* FOURIER-*Transformation:*

Definition: Für $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\check{g}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega \end{cases}$$

als inverse FOURIER-Transformierte von g.

Offensichtlich ist

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\omega) \quad \text{und} \quad \widehat{g}(t) = 2\pi\check{g}(-t)\,.$$

Je nach Buch oder Vorlesung werden die Vorfaktoren gelegentlich auch anders gewählt, beispielsweise stand in der HM II bis 1998 der Faktor $1/2\pi$ vor der FOURIER-Transformation selbst statt vor ihrer inversen. Die jetzt gewählte Definition paßt besser zu der aus der hiesigen Elektrotechnik; dort wird die FOURIER-Transformation als

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

definiert, wobei j wie in der Elektrotechnik üblich für die in der Mathematik und Physik mit i bezeichnete imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ steht, d.h. $F(j\omega) = \widehat{f}(\omega)$.

Einige Autoren bevorzugen es auch, aus Symmetriegründen bei beiden Transformationen einen Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ zu verwenden. In allen Fällen sind die Faktoren so aufeinander abgestimmt, daß für hinreichend gutartige Funktionen die Beziehungen

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t) \quad \text{und} \quad \widehat{\widehat{f}}(t) = f(t)$$

gelten.

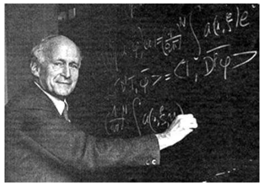
Die Existenz der FOURIER-Transformierten, d.h. die Konvergenz des uneigentlichen Integrals aus der Definition, sowie auch die obigen Formeln für $\check{\widehat{f}}$ und $\widehat{\widehat{f}}$ sind leider alles andere als selbstverständlich: Für $f(t) = 1$ oder auch $f(t) = e^{i\omega t}$ oder $f(t) = t^n$ und in vielen weiteren Fällen kann das Integral für $\widehat{f}(\omega)$ schon aus ganz trivialen Gründen nicht existieren.

Wenn wir sicher sein wollen, daß alles gut geht, müssen wir deshalb Bedingungen an die Funktion f stellen. Zur Vorsicht stellen wir zunächst einmal übertrieben starke Forderungen, zeigen, daß mit denen alles gut geht, und schrauben sie dann in einem nächsten Schritt wieder auf ein realistisches Maß herunter.

Definition: Eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *stark abfallend,* wenn die Funktionen

$$t \mapsto \left| t^r f^{(k)}(t) \right|$$

für alle $k, r \geq 0$ beschränkt sind. Die Menge aller stark abfallender Funktionen bezeichnen wir als SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.



LAURENT SCHWARTZ wurde 1915 in Paris geboren, studierte zunächst an der dortigen Ecole Normale Supérieure, dann an der Universität Straßburg. 1945 wurde er Professor in Nancy und entwickelte dort die mathematische Theorie der bislang nur von Physikern wie DIRAC und HEAVISIDE betrachteten Distributionen. Für diese Arbeiten wurde er 1950 mit der Fields Medal ausgezeichnet, dem bedeutendsten Preis in der Mathematik. Von 1953 bis zu seiner Emeritierung 1983 lehrte er in Paris.

Es ist klar, daß auch Summen und skalare Vielfache von stark abfallenden Funktionen stark abfallend sind; der SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist daher ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Beispiele: *a)* Die Funktion $f(t) = e^{-t^2}$ liegt in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: Sie ist beliebig oft stetig differenzierbar; ihre Ableitungen haben jeweils die Form $P(t)e^{-t^2}$ mit einem geeigneten Polynom P. Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom, geht e^{-t^2} schneller gegen Null als ein Polynom gegen unendlich gehen kann, das Produkt geht also für $t \to \pm\infty$ gegen Null und ist daher auf ganz $\mathbb{R}$ beschränkt.

b) Sei

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Da diese Funktion außerhalb des Intervalls (a,b) verschwindet und im Innern stetig ist, ist sie natürlich beschränkt. Ihre Ableitungen sind Produkte aus rationalen Funktionen mit f selbst; da $f(t)$ für $t \to a$ oder $t \to b$ erheblich schneller gegen null geht als eine rationale Funktion gegen unendlich gehen kann, haben alle Ableitungen an den Intervallgrenzen den Wert null; die Funktion ist also beliebig oft stetig differenzierbar. Die Beschränktheitsbedingungen sind problemlos: Im kompakten Intervall $[a,b]$ ist jede stetige Funktion beschränkt, und außerhalb sind alle hier betrachteten Funktionen null.

Ein erster Hinweis darauf, daß wir in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nur selten Probleme mit der Existenz von Integralen haben dürften, gibt das folgende

Lemma: *a)* Für eine Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ existieren

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)}\,dt .$$

b) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\omega \in \mathbb{R}$ existiert das FOURIER-Integral

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt ;$$

für $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}$ existiert das inverse FOURIER-Integral

$$\check{g}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega\,.$$

c) Die Abbildung

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ (f, g) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt \end{cases}$$

macht $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ zu einem HERMITEschen Vektorraum.

Beweis: a) Da sowohl $f(t)$ als auch $t^2 f(t)$ beschränkt sind, ist auch $(1 + t^2)f(t)$ beschränkt, es gibt also eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so daß

$$|f(t)| \le \frac{C}{1 + t^2} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}\,.$$

Da das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \lim_{a,b\to\infty} \int_{-a}^{b} \frac{dt}{1 + t^2} = \lim_{a,b\to\infty} \big(\arctan b - \arctan(-a)\big)$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

konvergiert, ist es eine konvergente Majorante des Integrals über f, so daß nach dem Majorantenkriterium auch das letztere konvergiert. Damit ist auch *b)* bewiesen, d.h. die Konvergenz aller Integrale $\widehat{f}(\omega)$ und $\check{g}(t)$, denn da $e^{\pm i\omega t}$ den Betrag eins hat, ist auch für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ *bzw.* $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t)| = \left|f(t) \cdot e^{-i\omega t}\right| \le \frac{C}{1 + t^2}$$

bzw.

$$|g(\omega)| = \left|g(\omega) \cdot e^{i\omega t}\right| \le \frac{C}{1 + \omega^2}\,.$$

Genauso läßt sich auch das Integral über $f(t)\overline{f(t)}$ abschätzen, denn da $|tf(t)|$ beschränkt ist, ist auch $\left|t^2 f(t)\overline{f(t)}\right|$ und damit $(1 + t^2)f(t)\overline{f(t)}$ beschränkt. (Betragsstriche sind hier natürlich überflüssig.)

b) Wie wir gerade gesehen haben, konvergiert das rechtsstehende Integral im Spezialfall $f = g$. Für beliebiges $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und beliebige reelle Zahlen $a \le b$ gilt nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung in der etwas allgemeineren Form aus §1*d)*

$$\left|\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt\right| \le \sqrt{\left|\int_a^b f(t)\overline{f(t)}\, dt\right|} \cdot \sqrt{\left|\int_a^b g(t)\overline{g(t)}\, dt\right|}\,,$$

und somit konvergiert mit der rechten Seite auch die linke für $a \to -\infty$ und $b \to \infty$.

Die Eigenschaften eines HERMITEschen Skalarprodukts sind klar bis auf die Eigenschaft, daß nur die Nullfunktion Skalarprodukt null mit sich selbst haben darf, aber da wir es hier mit beliebig oft stetig differenzierbaren und damit insbesondere stetigen Funktionen zu tun haben, folgt dies genauso wie in **[HM1]**, *Kap. 2,* §1*a)* für das Skalarprodukt auf dem Vektorraum aller stetiger Funktionen $[0, 1] \to \mathbb{R}$. ■

b) Der Satz von Fubini

Wenn wir die FOURIER-Transformation auch wieder rückgängig machen wollen, wissen wir nur dann, daß $\check{\widehat{f}}$ existiert, wenn $\widehat{f}$ wieder stark abfallend ist. Das ist für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ glücklicherweise immer der Fall; bevor wir das zeigen können, brauchen wir aber erst einige andere Eigenschaften der FOURIER-Transformation, die uns auch später noch in anderem Zusammenhang nützlich sein werden. Für diese wiederum benötigen wir einige einfache Aussagen über die Vertauschung von Grenzprozessen.

Lemma: *a)* Die Funktion $h\colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist auch

$$H\colon \begin{cases} [a, b] \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \displaystyle\int_c^d h(\omega, t)\, dt \end{cases}$$

stetig.
b) Ist h zusätzlich r-mal stetig partiell nach der ersten Variablen ω differenzierbar, so ist

$$\frac{d^r H}{d\omega^r}(\omega) = \int_c^d \frac{\partial^r h}{\partial\omega^r}(\omega, t)\, dt\,.$$

Beweis: a) Da $[a, b]$ und $[c, d]$ abgeschlossene Intervalle sind, ist h nicht nur stetig, sondern sogar gleichmäßig stetig. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jedes $t \in [c, d]$ gilt

$$|h(\omega_1, t) - h(\omega_2, t)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |\omega_1 - \omega_2| < \delta\,.$$

Für solche ω_1 und ω_2 ist dann

$$|H(\omega_1) - H(\omega_2)| \le \int_c^d |h(\omega_1, t) - h(\omega_2, t)|\, dt < \varepsilon(d - c)\,.$$

Da $d - c$ eine Konstante ist, läßt sich dies durch Wahl von $\varepsilon = \eta/(d - c)$ unter jedes vorgegebene $\eta > 0$ drücken.

b) Für $\Delta \neq 0$ ist

$$\frac{H(\omega + \Delta) - H(\omega)}{\Delta} = \int_c^d \frac{h(\omega + \Delta, t) - h(\omega, t)}{\Delta}\, dt\,,$$

und der rechtsstehende Integrand ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gleich $\frac{\partial h}{\partial\omega}(\xi, t)$ für ein ξ zwischen ω und $\omega + \Delta$. Für $\Delta \to 0$ geht dies gegen $\frac{\partial h}{\partial\omega}(\omega, t)$, und da die partielle Ableitung als stetig vorausgesetzt wurde, gilt wegen *a),* daß

$$H'(\omega) = \lim_{\xi\to\omega} \int_c^d \frac{\partial h}{\partial\omega}(\xi, t)\, dt = \int_c^d \frac{\partial h}{\partial\omega}(\omega, t)\, dt$$

ist, wie behauptet. Für $r > 1$ folgt die Behauptung induktiv. ■

Als erste Anwendung folgt ein Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge, der für die Inversion der FOURIER-Transformation fundamental sein wird:

Satz von Fubini: Für eine stetige Funktion $h\colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ ist

$$\int_a^b \left(\int_c^d h(\omega, t)\, dt\right) d\omega = \int_c^d \left(\int_a^b h(\omega, t)\, d\omega\right) dt\,.$$

Beweis: Das folgt entweder aus der zweidimensionalen Integrationstheorie in **[HM1]**, Kap. II, §6*b),* da beide Seiten das Integral

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} h(\omega, t)\, d\omega\, dt$$

berechnen, wobei das Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ als Normalbereich einmal vom Typ I und einmal vom Typ II aufgefaßt wird. Es folgt aber auch leicht aus dem gerade bewiesenen Lemma:

Für $a \le \omega \le b$ sei

$$H(\omega) = \int_c^d \left(\int_a^\omega h(\xi, t)\, d\xi\right) dt\,.$$

Nach der zweiten Aussage des gerade bewiesenen Lemmas ist dann

$$H'(\omega) = \int_c^d h(\omega, t)\, dt\,,$$

also ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung

$$\int_a^b \left(\int_c^d h(\omega, t)\, dt\right) d\omega = \int_a^b H'(\omega)\, d\omega = H(b) - H(a) = H(b)\,,$$

und das ist nach Konstruktion gleich der rechten Seite. ■

Der italienische Mathematiker GUIDO FUBINI (1879–1943) arbeitete zunächst auf dem Gebiet der Differentialgeometrie, interessierte sich dann aber immer mehr für analytische Themen wie Differentialgleichungen und Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher. 1901 wurde er Professor in Catania auf Sizilien, später in Genua und ab 1908 in Turin, wo er blieb, bis er 1939 trotz seiner angegriffenen Gesundheit wegen des italienischen Faschismus nach USA emigrierte und ans Institute for Advanced Study in Princeton wechselte. Der hier zitierte Satz ist zwar sein bekanntestes, aber ganz sicher nicht sein bedeutendstes Ergebnis.

Wir interessieren uns im Augenblick nicht für Integrale über endliche Intervalle, sondern für Integrale über die gesamte reelle Gerade; bevor wir den gerade bewiesenen Satz auf FOURIER-Integrale anwenden können, müssen wir also noch den Grenzübergang $a, c \to -\infty$ und $b, d \to +\infty$ durchführen. Nach dem WEIERSTRASSschen Konvergenzkriterium gibt es hier keine Probleme, *falls* die betroffenen Integrale absolut konvergent sind. Die für uns interessante Version des Satzes von FUBINI ist also

Satz: Die stetige Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei so, daß die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega,t)|\,dt\right)d\omega \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega,t)|\,d\omega\right)dt$$

beide konvergieren. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega,t)\,dt\right)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega,t)\,d\omega\right)dt\,.$$

■

c) Fourier-Integrale und Ableitungen

Die Aussagen des vorigen Abschnitts führen geradewegs auf Eigenschaften der FOURIER-Transformation; als erstes erhalten wir

Lemma: Für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und alle $r \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{d^r}{d\omega^r}\widehat{f}(\omega) = (-i)^r\,\widehat{t^r f}(\omega)$$

und

$$\omega^r\,\widehat{f}(\omega) = (-i)^r\,\widehat{f^{(r)}}(\omega)\,.$$

Beweis: Nach dem Lemma im vorigen Abschnitt ist

$$\frac{d^r\widehat{f}(\omega)}{d\omega^r} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^r}{d\omega^r}\Big(f(t)e^{-i\omega t}\Big)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(-it)^r f(t)e^{-i\omega t}\,dt = (-i)^r\,\widehat{t^r f}(\omega)\,,$$

womit die erste Aussage bewiesen wäre.

Für die zweite begnügen wir uns der Einfachheit halber mit dem Fall $r = 1$, aus dem die allgemeine Aussage per Induktion folgt. Für $r = 1$ ist

$$\omega\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\omega e^{-i\omega t}\,dt\,,$$

und dieses Integral läßt sich durch partielle Integration weiter umformen. Dazu nehmen wir $f(t)$ als den ersten Faktor und $\omega e^{-i\omega t}$ als den zweiten; letzterer hat die Stammfunktion

$$\frac{\omega e^{-i\omega t}}{-i\omega} = ie^{-i\omega t}\,,$$

und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\omega e^{-i\omega t}\,dt = \quad f(t)\cdot ie^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\dot f(t)\cdot ie^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Da f im SCHWARTZ-Raum liegt, strebt $f(t)$ für $t \to \pm\infty$ gegen null, der erste Summand verschwindet also, und übrig bleibt

$$\omega\widehat{f}(\omega) = -i\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}\,dt = -i\cdot\widehat{\dot f}(\omega)\,.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Die beiden Aussagen dieses Lemmas sind zentral für so ziemlich alle Anwendungen nicht nur der FOURIER-Transformation, sondern, wie wir bald sehen werden, auch für die Anwendung von Integraltransformationen überhaupt auf Differentialgleichungen.

Als erste Anwendung wollen wir uns überlegen, daß die inverse FOURIER-Transformation wirklich invers zur FOURIER-Transformation ist. Die Strategie ist folgende: Wir zeigen zunächst, daß dies für *eine* spezielle Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt, und folgern daraus in einem zweiten Schritt, daß dies für *alle* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Fall ist.

Für die eine spezielle Funktion aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ haben wir nicht viel Auswahl: Wir kennen bislang im wesentlichen nur zwei Beispiele, nämlich $f(t) = e^{-t^2}$ und $f(t) = e^{-1/(t-a)(b-t)}$ auf (a,b) und null sonst. Da das erste Beispiel etwas harmloser aussieht, nehmen wir dieses, und da es den Aufwand kaum vergrößert, später aber nützlich sein wird, verallgemeinern wir es leicht zu

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit} \quad \sigma \in \mathbb{R}\,.$$

Diese Funktion heißt GAUSS-Funktion mit Varianz σ^2; ihr Graph wird auch als *Glockenkurve* bezeichnet. Abbildung 15 zeigt die Kurven für $\sigma = 1/2$ (gepunktet), $\sigma = 1$ (ausgezogen) und $\sigma = 2$ (gestrichelt); wie man sieht, wird die Kurve flacher für größere σ, wohingegen kleine σ zu einem schärfer ausgeprägten Maximum führen. Im Abschnitt über Fehlerrechnung werden uns noch genauer mit dieser Funktion beschäftigen.

Nach Definition ist

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t}\,dt\,,$$

aber da schon die Stammfunktion von e^{-t^2} nicht elementar ausdrückbar ist, haben wir sicherlich wenig Chancen, dieses Integral über eine Stammfunktion zu berechnen.

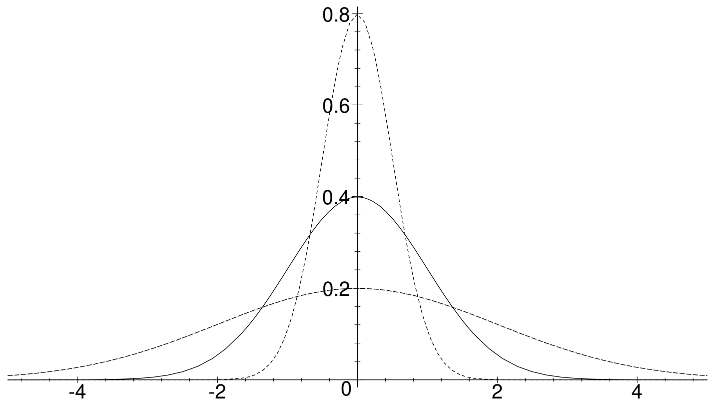


Abb. 15: Gaußkurven für $\sigma = \frac{1}{2}$, 1 und 2

Das Lemma aus dem vorigen Abschnitt erlaubt uns aber, Aussagen über die Ableitung von $\widehat{f}(\omega)$ machen:

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = (-i)\cdot\widehat{tf}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Der neue Integrand ist ziemlich ähnlich zur Ableitung des alten, denn

$$\frac{d}{dt}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t} = -\left(\frac{t}{\sigma^2}+i\omega\right)e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left(-\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\right) = (t+i\omega\sigma^2)\,e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,.$$

Die Funktion, die hier abgeleitet wird, geht für $t \to \pm\infty$ gegen null, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t+i\omega\sigma^2)\,e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt = -\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0\,,$$

und damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt = -i\omega\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt\,.$$

Die Ableitung von $\widehat{f}(\omega)$ ist daher

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\sigma}(-i\omega\sigma^2)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt = -\omega\sigma^2\cdot\widehat{f}(\omega)\,.$$

Somit ist $\widehat{f}(\omega)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = -\omega\sigma^2\cdot\widehat{f}(\omega)\,.$$

Diese Differentialgleichung hat auch die Lösung

$$g(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\,,$$

wie man durch Differenzieren von $g(\omega)$ leicht nachrechnet, und für den Quotienten dieser beiden Lösungen ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\widehat{f}(\omega)}{g(\omega)}\right) &= \frac{d}{d\omega}\left(\widehat{f}(\omega)e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\right)\\ &= \frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega)\cdot e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} + \widehat{f}(\omega)\cdot\sigma^2\omega e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\\ &= -\omega\sigma^2\widehat{f}(\omega)e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} + \omega\sigma^2\widehat{f}(\omega)e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = 0\,.\end{aligned}$$

Also ist der Quotient eine Konstante, d.h.

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(0)\cdot e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\,.$$

Damit ist uns die FOURIER-Transformierte von f bekannt bis auf die Konstante

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt\,.$$

In **[HM1]**, Kap. 2, §6*c)* hatten wir auf dem Umweg über ein zweidimensionales Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

berechnet; über die Substitution $u = t/\sqrt{2}\sigma$ folgt daraus sofort

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt = 1\,.$$

Als Endergebnis erhalten wir somit

$$\widehat{f}(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1/\sigma)}e^{\frac{-\omega^2}{2\cdot(1/\sigma)^2}}\,,$$

wobei die kompliziertere zweite Form zeigt, daß es sich abgesehen vom Vorfaktor $\sqrt{2\pi}/\sigma$ wieder um eine GAUSS-Funktion handelt, allerdings mit Varianz $1/\sigma^2$.

Mit der Abkürzung

$$N_\sigma(t) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$$

können wir kurz schreiben

$$\widehat{N_\sigma}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}N_{1/\sigma}(\omega)\,.$$

Damit kennen wir natürlich auch die inverse FOURIER-Transformierte einer GAUSS-Funktion, denn nach den allgemeinen Rechenregeln ist

$$\check{N}_\sigma(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{N_\sigma}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}N_{\frac{1}{\sigma}}(\omega)\,.$$

Insbesondere können wir damit nachrechnen, daß die *inverse* FOURIER-Transformation zumindest in diesem Beispiel tatsächlich invers zur FOURIER-Transformation ist, d.h.

$$\check{\widehat{N}}_\sigma(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\check{N}_{\frac{1}{\sigma}}(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sigma}}N_\sigma(t) = N_\sigma(t)\,.$$

Genauso zeigt man, daß auch

$$\widehat{\check{N}}_{\sigma(t)} = N_\sigma(t)$$

ist; die beiden Transformationen sind hier also in der Tat invers zueinander.

d) Die Umkehrung der Fourier-Transformation

Wie angekündigt, soll aus dem Beispiel des vorigen Abschnitts nun in einem zweiten Schritt gefolgert werden, daß dies nicht nur für die Funktionen N_σ gilt, sondern für *alle* Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, d.h.

Satz: Die FOURIER-Transformation und die inverse FOURIER-Transformation definieren zueinander inverse lineare Abbildungen

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \widehat{f} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ g \mapsto \check{g} \end{cases}.$$

Insbesondere sind also beide Abbildungen Isomorphismen, und für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t)\,.$$

Für das HERMITEsche Skalarprodukt auf $\mathcal{S}^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}\,d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\omega)\overline{\check{g}(\omega)}\,d\omega\,,$$

und damit insbesondere auch

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \sqrt{2\pi}\left\|\check{f}\right\|_2 \quad \text{mit} \quad \|f\|_2 = \sqrt{(f,\,f)}\,.$$

Beweis: Die Linearität ist, wie bei jedem Integral, klar; das Problem ist, ob $\widehat{f}$ und $\check{g}$ stark abfallend sind. Betrachten wir zunächst nur die Produkte $\omega^r\widehat{f}(\omega)$. Für diese ist

$$\left|\omega^r\widehat{f}(\omega)\right| = \left|(-i)^r\widehat{f^{(r)}}(\omega)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t)e^{-i\omega t}\,dt\right|$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \left|f^{(r)}(t)\right|\,dt < \infty\,,$$

da f stark abfallend ist. Für

$$\omega^r\widehat{f}^{(k)}(\omega) = \omega^r(-i)^k\widehat{t^kf}(\omega)$$

können wir genauso argumentieren, und wegen des Zusammenhangs zwischen FOURIER-Transformation und inverser FOURIER-Transformation folgt daraus auch das Ergebnis für $\check{g}$.

Als nächstes wollen wir uns überlegen, daß für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t)$$

ist. Dazu benutzen wir zwei zunächst beliebige weitere Funktionen $g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, die wir im Laufe der Rechnung nach Bedarf genauer festlegen werden.

Nach Definition ist

$$\check{\widehat{f}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,;$$

wir betrachten das etwas allgemeinere Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}ds\right)e^{i\omega t}g(\omega)\,d\omega\,,$$

das wir nach dem Satz von FUBINI weiter ausrechnen können als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega(s-t)}\,d\omega\right)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\widehat{g}(s-t)\,ds\,.$$

Nun sei a eine positive reelle Konstante und $g(\omega) = h(a\omega)$, wobei die Funktion $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ im Augenblick noch beliebig ist. Dann führt die Substitution $\nu = a\omega$ auf

$$\widehat{g}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(a\omega)e^{-i\omega s}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)e^{-i\nu\frac{s}{a}}\,\frac{d\nu}{a}$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)e^{-i\nu\frac{s}{a}}\,d\nu = \frac{1}{a}\widehat{h}\left(\frac{s}{a}\right)\,.$$

und nach obiger Rechnung ist daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}h(a\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cdot\frac{1}{a}\cdot\widehat{h}\left(\frac{s-t}{a}\right)ds\,.$$

Mit der neuen Variablen

$$u \underset{\text{def}}{=} \frac{s-t}{a}$$

ist $s = t + au$, und wir können diese Formel auch kürzer schreiben als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}h(a\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+au)\cdot\widehat{h}(u)\,du\,.$$

Beide Seiten sind stetig in a; für $a \to 0$ erhalten wir auf der linken Seite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}h(0)\,d\omega = h(0)\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = 2\pi\cdot h(0)\cdot\check{\widehat{f}}(t)$$

und rechts

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\widehat{h}(u)\,du = f(t)\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{h}(u)\,du = 2\pi\cdot f(t)\cdot\check{\widehat{h}}(0)\,.$$

Also ist für zwei beliebige Funktionen $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ stets

$$h(0)\cdot\check{\widehat{f}}(t) = f(t)\cdot\check{\widehat{h}}(0)\,.$$

Setzen wir nun für h speziell eine GAUSS-Funktion ein, etwa

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{2}}\,,$$

so wissen wir bereits aus dem obigem Beispiel, daß $\widehat{h}$ und h übereinstimmen; insbesondere haben beide an der Stelle $\omega = 0$ den von null verschiedenen Wert $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, so daß wir durch diesen Wert dividieren können und die gewünschte Formel

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t)$$

erhalten. Wegen der Beziehungen

$$\widehat{\widehat{f}}(\omega) = 2\pi\check{\check{f}}(-\omega) \quad\text{und}\quad \check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\omega)$$

ist dann auch

$$\widehat{\check{f}}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi f\big(-(-\omega)\big) = f(\omega)\,.$$

Zu beweisen bleibt noch, daß die beiden Transformationen auch das HERMITEsche Skalarprodukt auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ respektieren. Dazu wiederholen wir einfach die Rechnung zu Beginn des Beweises ohne den Faktor $e^{i\omega t}$: Für eine beliebige Funktion $g(\omega)$ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right)g(\omega)\,d\omega$$

nach dem Satz von FUBINI gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t)\,dt\,,$$

wir haben also die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t)\,dt\,. \qquad (*)$$

Um daraus Aussagen über das HERMITEsche Skalarprodukt herzuleiten, benutzen wir die Beziehungen

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi\check{\widehat{f}}(-t) = 2\pi f(-t) \quad\text{oder}\quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{f}}(-t) \qquad (**)$$

und

$$\begin{aligned}\overline{\widehat{g}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\overline{g}(t)\,\overline{e^{-i\omega t}}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{g}(t)\,e^{i\omega t}\,dt\\ &= -\int_{\infty}^{-\infty}\overline{g}(-t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{g}(-t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad (***)\\ &= \widehat{\overline{g}}(-\omega)\,,\end{aligned}$$

wobei der Übersichtlichkeit halber $\overline{g}$ für diejenige Funktion steht, die jedem Wert t den Funktionswert $\overline{g}(t) = \overline{g(t)}$ zuordnet; entsprechend ist $\overline{\widehat{g}}(t) = \overline{\widehat{g}(t)}$.

Damit läßt sich das HERMITEsche Skalarprodukt folgendermaßen umformen:

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt \underset{(**)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{f}}(-t)\widehat{\widehat{\overline{g}}}(-t)\,dt$$

$$\underset{(*)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{\widehat{f}}}(-t)\widehat{\overline{g}}(-t)\,dt \underset{(**)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\cdot 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\widehat{\overline{g}}(-t)\,dt$$

$$\underset{(***)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f},\widehat{g})\,.$$

Die Aussage über das Produkt der inversen FOURIER-Transformierten folgt nun einfach daraus, daß die beiden Transformationen zueinander invers sind:

$$(\check{f},\check{g}) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{\check{f}},\widehat{\check{g}}) = \frac{1}{2\pi}(f,g)\,.$$

■

Bemerkung: Falls wir für beide Transformationen den Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ gewählt hätten, würden beide das HERMITEsche Skalarprodukt respektieren, allerdings müßten wir uns dann ständig mit dieser Wurzel vor den Integralen herumschlagen. So hat jede Normierung ihre Vor- und Nachteile.

e) Die Fourier-Transformation eines Rechteckimpulses

Mit dem gerade bewiesenen Satz haben wir eine einigermaßen befriedigende Theorie der FOURIER-Transformation auf dem SCHWARTZ-Raum der stark abfallenden Funktionen. Dies genügt freilich nicht, denn wir möchten auch Funktionen transformieren, die *nicht* unendlich oft stetig differenzierbar sind. Für die *Existenz* des FOURIER-Integral brauchen wir die Differenzierbarkeit nicht; beispielsweise haben wir schon im Beweis

für die Existenz des FOURIER-Integrals für stark abfallende Funktionen gesehen, daß es dazu nur auf die Existenz des Integrals über den Betrag der Funktion von $-\infty$ bsi ∞ ankommt. Der Vollständigkeit halber sei dies hier noch einmal explizit festgehalten:

Definition: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *absolut integrierbar,* wenn das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$$

existiert.

Lemma: Für eine absolut integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ existiert die FOURIER-Transformierte

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Beweis: Da $e^{-i\omega t}$ den Betrag eins hat, ist $|f(t)e^{-i\omega t}| = |f(t)|$; die Funktion $f(t)e^{-i\omega t}$ ist also absolut integrierbar, und damit existiert erst recht das uneigentliche Integral über die Funktion selbst.

■

Als *Beispiel* betrachten wir die FOURIER-Transformierte eines Rechteckimpulses

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{für } -b \le t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

Hier ist

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-b}^{b} ae^{-i\omega t}\,dt = \frac{a}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-b}^{b}$$

$$= \frac{a}{\omega}\,\frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{i} = \frac{2a\sin\omega b}{\omega}\,.$$

Mit der in der Elektrotechnik sehr wichtigen Funktion

$$\operatorname{sinc} t = \frac{\sin t}{t}$$

läßt sich dies auch schreiben als

$$\widehat{f}(\omega) = 2ab\,\operatorname{sinc}\omega b\,.$$

Anstelle von $\operatorname{sinc} t$ schreiben manche Autoren auch $\operatorname{si} t$, man darf die Funktion aber nicht mit Ihrer Stammfunktion, dem Integralsinus $\operatorname{Si} t$, verwechseln.

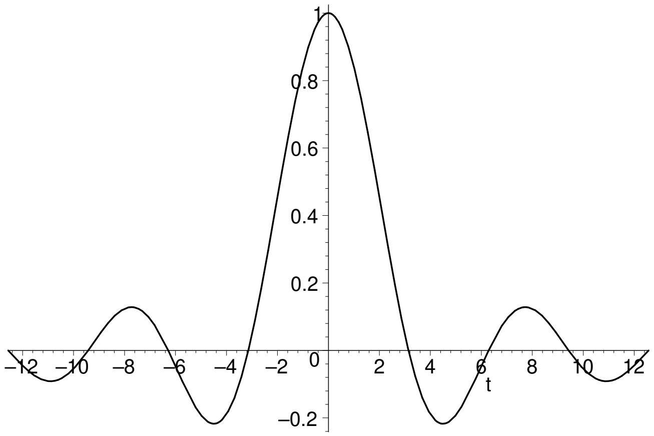


Abb. 16: Die Funktion $\operatorname{sinc} t = \frac{\sin t}{t}$

Natürlich stellt sich die Frage, was die gerade ausgerechnete FOURIER-Transformierte wert ist: Falls die in den letzten Abschnitten bewiesenen Sätze nicht zumindest zum größten Teil auch hier gelten, nützt uns das ganze nur wenig.

Einen Hinweis darauf, daß die Theorie auch für den Rechteckimpuls gelten könnte, liefert die Tatsache, daß sich der Rechteckimpuls annähern läßt durch stark abfallende Funktionen:

Wir kennen bereits eine Funktion in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, die auch außerhalb des Intervalls (a, b) verschwindet und in dessen Innern positiv ist, nämlich die

Funktion

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\dfrac{-1}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Allgemeiner hat für jede reelle Zahl $r > 0$ auch

$$g_r\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\dfrac{-r}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

dieselbe Eigenschaft. Da $(t-a)(b-t)$ bei $t = (a+b)/2$ maximal wird, hat g_r dort sein einziges Maximum und

$$g_r\left(\frac{a+b}{2}\right) = e^{\dfrac{-4r}{(b-a)^2}}\,.$$

Unser Rechteckimpuls hat eins als Maximalwert; deshalb betrachten wir besser anstelle der g_r die mit dem Kehrwert des Maximums multiplizierten Funktionen

$$f_r\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\dfrac{4r}{(b-a)^2}}\, e^{\dfrac{-r}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases},$$

die alle bei $(a+b)/2$ ihren Maximalwert eins annehmen.

Abbildung 17 zeigt für $a = 2$ und $b = 7$ die entsprechenden Funktionen mit $r = 10$, $r = 1$ und für $r = 0{,}1$. Die innerste Kurve für $r = 10$ zeigt noch ein klar ausgeprägtes Maximum, die Kurve für $r = 1$ ist schon deutlich flacher im mittleren Teil, und die für $r = 0{,}1$ schließlich erinnert schon recht gut an den Rechteckimpuls f.

Diese Abbildung legt die Vermutung nahe, daß die f_r für $r \to 0$ in der L^2-Norm gegen f konvergieren. Leider können wir aber $\|f - f_r\|_2$ nicht ausrechnen, da wir keine Stammfunktion von f_r kennen. (Schon e^{-t^2} ist

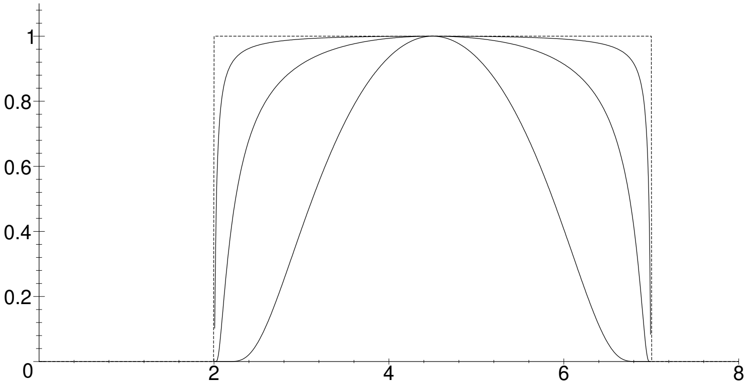


Abb. 17: Approximation des Rechteckimpulses durch stark abfallende Funktionen

schließlich nicht elementar integrierbar.) Deshalb müssen wir uns mit Abschätzungen begnügen. Wir erwarten, daß f_r im mittleren Bereich immer besser mit der Geraden auch Höhe eins übereinstimmt, während es am Rand des Intervalls immer steiler gegen null geht. Daher wählen wir ein $\delta > 0$ und betrachten getrennt denn mittleren Teil $[a+\delta, b-\delta]$ des Intervalls und die beiden Randintervalle $[a, a+\delta]$ und $[b-\delta, b]$.

Über das Verhalten von f_r in den Randintervallen können wir so gut wie nichts sagen; wir wissen nur, daß auf jeden Fall $0 \le f_r(t) \le 1$ ist und schätzen die Differenz zwischen $f(t) = 1$ und $f_r(t)$ daher ab durch eins.

Im mittleren Intervall ist die Differenz zwischen $f(t)$ und $f_r(t)$ im Intervallmittelpunkt $(a+b)/2$ gleich null und wächst dann, wie man sich durch Ableiten von f_r leicht überzeugt, monoton. Insbesondere ist f_r monoton wachsend sowohl in $t-a$ als auch in $b-t$; wir erhalten daher für das mittlere Intervall eine untere Schranke, wenn wir für beide Differenzen den Wert δ einsetzen, was auf

$$e^{\dfrac{4r}{(b-a)^2}}\, e^{\dfrac{-r}{\delta(1-\delta)}} = e^{-r\left(\dfrac{1}{\delta(1-\delta)} - \dfrac{4}{(b-a)^2}\right)}$$

führt. Für $t \in [a+\delta, b-\delta]$ gilt daher

$$f(t) - f_r(t) \le 1 - e^{-r\left(\dfrac{1}{\delta(1-\delta)} - \dfrac{4}{(b-a)^2}\right)} .$$

Dieser Ausdruck ist nicht sehr angenehm, wir wollen ihn noch weiter abschätzen. Nach Konstruktion von f_r ist der Exponent negativ, und für alle $x \ge 0$ ist $1 - e^{-x} \le x$, denn dies gilt für $x = 0$, und die Ableitung e^{-x} von $1 - e^{-x}$ ist für jedes positive x kleiner als die Ableitung eins von x. Daher ist für $t \in [a+\delta, b-\delta]$

$$\begin{aligned} f(t) - f_r(t) &\le 1 - e^{-r\left(\dfrac{1}{\delta(1-\delta)} - \dfrac{4}{(b-a)^2}\right)} \\ &\le r\left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right) . \end{aligned}$$

Wir interessieren uns vor allem für kleine Werte von δ; deshalb betrachten wir im folgenden nur noch Werte $\delta \le \frac{1}{2}$. Dann ist $1 - \delta \ge \frac{1}{2}$ und

$$f(t) - f_r(t) \le r\left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2}\right) .$$

Damit können wir die L^2-Norm der Differenz abschätzen:

$$\begin{aligned} \|f - f_r\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)|^2\, dt \\ &= \int_a^{a+\delta} |f(t) - f_r(t)|^2\, dt + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(t) - f_r(t)|^2\, dt \\ &\quad + \int_{b-\delta}^{b} |f(t) - f_r(t)|^2\, dt \\ &\le \delta + r^2(b-a)\left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)^2 + \delta . \end{aligned}$$

Setzen wir hier speziell $\delta = \sqrt{r}$, was wir für hinreichend kleine r dürfen, so wird dies zu

$$\begin{aligned} &\sqrt{r} + r^2(b-a)\left(\frac{2}{\sqrt{r}} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)^2 + \sqrt{r} \\ &= 2\sqrt{r} + r(b-a)\left(2 - \frac{4\sqrt{r}}{(b-a)^2}\right)^2 , \end{aligned}$$