WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

27. März 2002

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $\left\{\binom{1}{i}, \binom{-i}{1}\right\}$ ist eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^2$.
2) *Richtig oder falsch:* Die FOURIER-Reihe von $f(t) = |\sin t + \cos t|$ enthält keine Sinusterme.
3) *Zeigen Sie:* Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist $(f+g) * (f-g) = f * f - g * g$!
4) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 3y(t)^{2/3}$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.
5) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $\begin{pmatrix} -i & 2i \\ 2i & -i \end{pmatrix}$ hat lauter reelle Eigenwerte.
6) *Richtig oder falsch:* Die Zahlen $\left(\cos \frac{k}{10}, \tan \frac{k}{10}\right)$ für $1 \leq k \leq 10$ sind positiv korreliert.

Aufgabe 1: **(***4 Punkte)*

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) + y(t) = e^t$ mit $y(0) = 0$!

b) Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

Aufgabe 2: **(***8 Punkte)*

$f(t)$ sei die Rechteckschwingung mit Periode 2π, für die gilt $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{für } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$.

a) Berechnen Sie die LAPLACE-Transformierte von f, und geben Sie diese in möglichst kompakter Form an!

b) Laut Vorlesung ist die FOURIER-Reihe von f die Reihe

$$S_f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1} .$$

Wo und wie unterscheidet sich $S_f(t)$ von $f(t)$? Wo tritt das GIBBS-Phänomen auf?

c) Bestimmen Sie die komplexe FOURIER-Reihe von f und, gegebenenfalls unter Verwendung von DIRAC-„Funktionen“, die FOURIER-Transformierte $\widehat{f}(\omega)$!

Aufgabe 3: (*4 Punkte*)

Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ die Matrix e^A !

Aufgabe 4: (*10 Punkte*)

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und bestimmen Sie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren von A!

c) Berechnen Sie die Matrix e^{At} !

d) Finden Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$!

e) Für welche Anfangsbedingungen $x(0) = a,\ y(0) = b,\ z(0) = c$ bleiben die Lösungsfunktionen für $t \to \infty$ beschränkt?

f) Wann sind die bei *e)* auftretenden Lösungen stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Aufgabe 5: (*7 Punkte*)

a) Zeigen Sie: $\sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$

b) Zeigen Sie: Die Funktion $h(t) = \frac{\sin t}{t}$ ist monoton fallend in $[0, \pi]$.
Ist h gerade, ungerade oder keines von beiden?

c) Bestimmen Sie alle (relativen) Maxima und Minima der Funktion $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 \leq 1$!

Steht Ihr Name auf jedem Blatt?

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.

Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe, notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.