Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

25. März 2002

Nachklausur und 18. Übungsblatt Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Was ist $\int \cos^4 t\,dt$?

Lösung:

$$\cos^4 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4it}+4e^{2it}+6+4e^{-2it}+e^{-4it}}{16} = \frac{\cos 4t}{8}+\frac{\cos 2t}{2}+\frac{3}{8},$$

d.h.

$$\int \cos^4 t\,dt = \frac{\sin 4t}{32}+\frac{\sin 2t}{4}+\frac{3t}{8}+C\,.$$

(Wie bei trigonometrischen Funktionen üblich, läßt das natürlich auch auf andere Weise schreiben: Aufgrund der Beziehungen

$$\sin^4 t = 8\cos^3 t\sin t - 4\cos t\sin t \quad \text{und} \quad \sin 2t = 2\cos t\sin t$$

ist das Ergebnis beispielsweise auch gleich

$$\frac{\cos^3 t\sin t}{4}+\frac{3\cos t\sin t}{8}+\frac{3t}{8}+C\,.)$$

2) *Richtig oder falsch:* Die Fourier-Reihe der Funktion $f(t) = \dfrac{1}{1+\tan^2 t}$ enthält keine Sinusterme.

Lösung: *Richtig,* denn $f(t)$ ist eine gerade Funktion.

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

Lösung: *Falsch:* Das charakteristische Polynom von A ist $(1-\lambda)(-1-\lambda)+1 = \lambda^2$; null ist also Eigenwert der algebraischen Vielfachheit zwei, hat aber wegen $A \neq 0$ nur geometrische Vielfachheit eins.

4) Was ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t)+4y^{(3)}(t)+6\ddot y(t)+4\dot y(t)+y(t)=0\,?$$

Lösung: Das charakteristische Polynom ist $\lambda^4+4\lambda^3+6\lambda^2+4\lambda+1 = (\lambda+1)^4$; die allgemeine Lösung ist also $(a+bt+ct^2+dt^3)e^{-t}$ mit beliebigen reellen Zahlen a, b, c, d.

5) *Richtig oder falsch:* Falls die differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 1\right\}$$

ein Maximum hat, verschwindet dort der Gradient von f.

Lösung: *Richtig:* Da die Menge $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 1\right\}$ keinen ihrer Randpunkte enthält, kann das Maximum nur in einem inneren Punkt angenommen werden, und damit muß der Gradient dort verschwinden.

6) *Richtig oder falsch:* Die Zahlen (k^2, k^4) für $-10 \le k \le 10$ aus $\mathbb{Z}$ sind positiv korreliert.

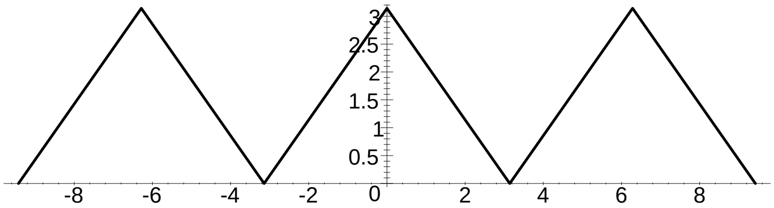
Lösung: *Richtig,* denn wenn k^2 größer wird, wird auch k^4 größer. (Nachrechnen zeigt, daß der Korrelationskoeffizient ungefähr bei 0,95977 liegt.)

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode 2π, und für $t \in [-\pi, \pi]$ sei $f(t) = \pi - |t|$.

a) Skizzieren Sie f über dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$!

Lösung:



b) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f! Welche Symmetrien lassen sich dabei ausnutzen?

Lösung: f hat die Periode $T = 2\pi$, also die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$. Da die Funktion offensichtlich gerade ist, gibt es in der FOURIER-Reihe von f keine Sinusterme, und wir können bei der Berechnung der verbleibenden Koeffizienten eine Fallunterscheidung einsparen, wenn wir beachten, daß für eine gerade Funktion mit Periode T stets gilt

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = 2\int_0^{T/2} f(t)\,dt\,.$$

Der konstante Term ist das Periodenmittel

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - |t|)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\pi\,dt - \int_{\pi}^{\pi} t\,dt\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der höheren Cosinusterme lassen sich berechnen als

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - |t|)\cos kt\,dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\pi\cos kt\,dt - \int_0^{\pi} t\cos kt\,dt\right)\,. \end{aligned}$$

Im letzten Ausdruck verschwindet das erste Integral, da hier ein Cosinus von null bis zu einem ganz- oder halbzahligen Vielfachen der Periodenlänge integriert wird. Für das zweite Integral berechnen wir zunächst durch partielle Integration eine Stammfunktion von $t \cos kt$:

$$\int t \cos kt \, dt = t \cdot \frac{\sin kt}{k} - \int \frac{\sin kt}{k} \, dt = t \cdot \frac{\sin kt}{k} + \frac{\cos kt}{k^2} + C \,,$$

d.h.

$$\int t \cos kt \, dt = \frac{t}{k} \sin kt + \frac{1}{k^2} \cos kt + C \,.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos kt \, dt = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{k} \sin k\pi + \frac{1}{k^2} (\cos k\pi - \cos 0) \right) \\ &= -\frac{2}{\pi k^2} \big((-1)^k - 1 \big) = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } k \\ \frac{4}{\pi k^2} & \text{für ungerade } k \,. \end{cases} \end{aligned}$$

Die FOURIER-Reihe von f ist also

$$S_f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4 \cos(2k+1)t}{(2k+1)^2 \, \pi} \,.$$

c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe gegen $f(t)$?

Lösung: Überall, wo f stetig ist, also für alle $t \in \mathbb{R}$, denn die Betragsfunktion ist stetig, und an beiden Enden des Periodenintervalls $[-\pi, \pi]$ nimmt $\pi - |t|$ denselben Wert Null an.

d) Tritt bei der Konvergenz das GIBBS-Phänomen auf?

Lösung: Nein, denn es gibt keine Sprungstellen.

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

a) Für eine gerade FOURIER-transformierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist

$$\widehat{f}(\omega) = 2 \int_0^\infty f(t) \cos \omega t \, dt \,.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \big(\cos \omega t + i \sin \omega t \big) \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt + i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt \,. \end{aligned}$$

Die beiden Integrale in der letzten Zeile sind Realteil und Imaginärteil von $\widehat{f}(\omega)$, existieren also, und damit verschwindet das Sinusintegral, da $f(t) \sin \omega t$ für jedes ω eine ungerade Funktion ist. Also ist

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = 2 \int_0^\infty f(t) \cos \omega t \,,$$

da der Integrand gerade ist.

b) Bestimmen Sie die FOURIER-Transformierte von $f_a(t) = \begin{cases} |t| & \text{für } |t| \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ in Abhängigkeit von der reellen Zahl $a > 0$!

Lösung: Da $|t|$ eine gerade Funktion ist, können wir *a)* anwenden und erhalten

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = 2 \int_0^a t \cos \omega t \, dt \, .$$

Für die Berechnung einer Stammfunktion von $t \cos \omega t$ können wir genauso vorgehen wie bei der letzten Aufgabe; da wir dort zumindest für die Stammfunktion nirgends benutzt haben, daß k eine natürliche Zahl ist, müssen wir in der Tat einfach in der dort hergeleiteten Formel k durch ω ersetzen:

$$\int t \cos \omega t \, dt = t \cdot \frac{\sin \omega t}{\omega} - \int \frac{\sin \omega t}{\omega} \, dt = \frac{t \sin \omega t}{\omega} + \frac{\cos \omega t}{\omega^2} + C \, .$$

Somit ist

$$\widehat{f}_a(\omega) = \frac{2a \sin \omega a}{\omega} + \frac{2 \cos \omega a - 2}{\omega^2} \, .$$

c) Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{a \to \infty} \widehat{f}_a(\omega)$, und falls ja: Welche Funktion ist das?

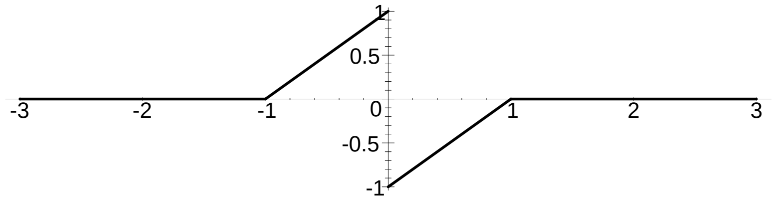
Lösung: Da sowohl $\sin \omega a$ als auch $\cos \omega a$ für jedes $\omega \neq 0$ als Funktionen von a periodisch zwischen -1 und 1 hin- und herschwingen, und da sich die entsprechenden Schwankungen im obigen Ausdruck nicht gegenseitig kompensieren, existiert der Grenzwert nur für $\omega = 0$, nicht aber als Funktion eines variablen ω.

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

Für $t \in \mathbb{R}$ sei $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ t+1 & \text{für } -1 \le t < 0 \\ t-1 & \text{für } 0 \le t \le 1 \end{cases}$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f!

Lösung:



b) Berechnen Sie die Ableitung von f im Distributionensinne!

Lösung: Die Ableitung im Distributionensinne ist die Ableitung der Distribution T_f; für eine Funktion φ aus dem SCHWARTZ-Raum ist dabei laut Vorlesung $\dot{T}_f(\varphi) = -T_f(\dot{\varphi})$, d.h.

$$-\dot{T}_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\dot{\varphi}(t) \, dt = \int_{-1}^{0} (t+1)\varphi(t) \, dt + \int_0^1 (t-1)\varphi(t) \, dt$$

$$= (t+1)\varphi(t) \Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \varphi(t) \, dt + (t-1)\varphi(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi(t) \, dt = 2\varphi(0) - \int_{-1}^{1} \varphi(t) \, dt$$

nach der Regel über partielle Integration. Somit ist die Ableitung von T_f jene Distribution $\dot{T}_f$, für die gilt

$$\dot{T}_f(\varphi) = -2\varphi(0) + \int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt\,.$$

c) Geben Sie diese Ableitung, gegebenenfalls unter Verwendung von $\delta(t)$, als „Funktion“ an! Ist diese „Funktion“ eindeutig bestimmt?

Lösung: Gesucht ist eine Funktion $F(t)$, so daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\varphi(t)\,dt = T_F(\varphi) = -2\varphi(0) + \int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt$$

ist. Für den ersten Summanden brauchen wir eine DIRAC-Distribution; das Integral kann über einen Rechteckimpuls definiert werden: Mit

$$R\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

ist die gesuchte Ableitung als „Funktion“ $F(t) = -2\delta(t) + R(t)$. Das ist natürlich nicht eindeutig: Da F nur über die Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\varphi(t)\,dt$ für Funktionen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiert ist, ändert sich nichts, wenn man den Wert von F an endlich vielen Stellen verändert; selbst unendlich viele Stellen sind problemlos, falls sie isoliert liegen.

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y^{(3)}(t) + \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 51 \sin 2t, \qquad y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0 \quad !$$

Lösung: Für die LAPLACE-Transformierte $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ der Lösung ist wegen der einfachen Anfangsbedingungen

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\}(s) = s^n Y(s) \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3\,,$$

also

$$(s^3 + s^2 + s + 1)Y(s) = 51\mathcal{L}\{\sin 2t\}(s) = \frac{51 \cdot 2}{s^2 + 2^2} = \frac{102}{s^2 + 4}\,,$$

d.h.

$$Y(s) = \frac{102}{(s^3 + s^2 + s + 1)(s^2 + 4)}\,.$$

In dieser Form ist der Bruch nicht in der unten angegebenen Formelsammlung zu finden; man sieht aber leicht, daß der kubische Faktor bei $s = -1$ verschwindet, und wenn man es nicht mit bloßem Auge sieht, zeigt eine Polynomdivison schnell, daß

$$s^3 + s^2 + s + 1 = (s + 1)(s^2 + 1)$$

ist. Wir können daher auch schreiben

$$Y(s) = \frac{102}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)(s + 1)}\,.$$

Darauf läßt sich die Formel

$$\mathcal{L}\left\{\frac{b\sin t-\cos t}{(b^2+1)(a^2-1)}+\frac{\cos at-\frac{b}{a}\sin at}{(a^2+b^2)(a^2-1)}+\frac{e^{-bt}}{(a^2+b^2)(b^2+1)}\right\}(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2+a^2)(s+b)}$$

anwenden mit $a=2$ und $b=1$; wir erhalten

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t-\cos t}{6}+\frac{\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t}{15}+\frac{e^{-t}}{10}\right\}(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)(s+1)}\,.$$

Multiplikation mit 102 macht daraus

$$\mathcal{L}\left\{17(\sin t-\cos t)+\frac{34}{5}\left(\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+\frac{51}{5}e^{-t}\right\}(s)=\frac{102}{(s^2+1)(s^2+4)(s+1)}\,;$$

die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(t)=17(\sin t-\cos t)+\frac{34}{5}\cos 2t-\frac{17}{5}\sin 2t+\frac{51}{5}e^{-t}\,.$$

b) Wie verhält sich die Lösung für $t\to\infty$? War dieses Verhalten zu erwarten?

Lösung: Die Funktion nähert sich immer mehr der Überlagerung zweier reiner Schwingungen an, von denen einen die doppelte Freqenz hat wie die andere. Zwischen den beiden Schwingungen gibt es auch eine Phasenverschiebung. Da die rechte Seite der Differentialgleichung eine reine Schwingung mit Kreisfrequenz zwei ist, ist zumindest die Periodizität nicht verwunderlich; daß es sich um eine Überlagerung zweier Frequenzen handelt, war mit unseren bisherigen Kenntnissen ohne Rechnung nicht klar.

Aufgabe 5: (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\1&-3&0\\1&-1&-2\end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-3-\lambda&1&-1\\1&-3-\lambda&0\\1&-1&-2-\lambda\end{vmatrix}\,;$$

wir entwickeln nach der zweiten Zeile: (Entwicklung nach der dritten Spalte wäre ähnlich einfach.)

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E)&=-\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-2-\lambda\end{vmatrix}+(-3-\lambda)\begin{vmatrix}-3-\lambda&-1\\1&-2-\lambda\end{vmatrix}\\&=(2+\lambda)+1-(3+\lambda)\big((-3-\lambda)(-2-\lambda)+1\big)\\&=(3+\lambda)\big(1-(3+\lambda)(2+\lambda)-1\big)=-(3+\lambda)^2(2+\lambda)\,.\end{aligned}$$

Es gibt also die beiden Eigenwerte $\lambda=-2$ mit algebraischer und damit auch geometrischer Vielfachheit eins und $\lambda=-3$ mit algebraischer Vielfachheit zwei.

Zur Bestimmung der geometrischen Vielfachheit von -3 müssen wir die Dimension des Eigenraums berechnen: Die erste Zeile der Matrix

$$A + 3E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

zeigt, daß die zweite und dritte Komponente jedes Eigenvektors gleich sein müssen; die zweite Zeile zeigt, daß die erste Komponente verschwinden muß. Der Eigenraum wird daher aufgespannt von

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und ist somit nur eindimensional. Also ist die geometrische Vielfachheit von -3 gleich eins.

b) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren von A!

Lösung: Da der Eigenwert -3 um eins kleinere geometrische als algebraische Vielfachheit hat, müssen wir noch einen Hauptvektor der Stufe zwei berechnen. Die Matrix

$$(A + 3E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

annuliert natürlich den Eigenvektor $\vec{b}_1$; einen davon linear unabhängigen Hauptvektor erhalten wir, wenn wir die zweite und damit auch die dritte Komponente der Lösung willkürlich auf null setzen: Dann kann die erste Komponente beliebig sein, wir erhalten also den Vektor

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

als zweiten Basisvektor des Hauptraums zum Eigenwert -3.
Für $\lambda = -2$ ist

$$(A + 2E) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die zweite und dritte Zeile zeigen, daß die erste und die zweite Komponente jedes Eigenvektors gleich sein müssen, und unter dieser Bedingung zeigt die erste Zeile, daß die dritte Komponente verschwindet. Der Eigenraum wird also aufgespannt von

$$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

und damit haben wir eine Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ aus Eigen- und Hauptvektoren gefunden.

c) Berechnen Sie die Matrix e^{At} !

Lösung: Wir müssen zunächst die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$ bezüglich der Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ bestimmen. Da in den Spalten dieser Matrix die Bilder

der Basisvektoren stehen, brauchen wir also die Vektoren $A\vec{b}_i$, was im Falle der beiden Eigenvektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_3$ kein Problem ist: Die werden einfach mit dem zugehörigen Eigenwert -2 *bzw.* -3 multipliziert. Für $\vec{b}_2$ müssen wir rechnen:

$$A\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3\vec{b}_2 + \vec{b}_1 \,.$$

Somit ist die Abbildungsmatrix bezüglich der neuen Basis

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

wobei die Diagonalmatrix D und der zweite Summand N offensichtlich kommutieren. Also ist

$$\begin{aligned} e^{Mt} &= e^{Dt}e^{Nt} = e^{Dt}(E + Nt) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Dies muß nun noch zurücktransformiert werden auf die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$; die Matrix des Basiswechsels von der Standardbasis zur neuen Basis enthält die Vektoren $\vec{b}_i$ als Spalten, ist also

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Inverse dazu berechnet man entweder nach GAUSS, oder aber, indem man die Vektoren $\vec{e}_i$ der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ in der neuen Basis hinschreibt; beides führt auf

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} ,$$

und Ausmultiplizieren ergibt

$$e^{At} = Be^{Mt}B^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} & e^{-3t} - e^{-2t} \\ te^{-3t} & e^{-2t} - te^{-3t} & (1+t)e^{-3t} - e^{-2t} \\ te^{-3t} & -te^{-3t} & (1+t)e^{-3t} \end{pmatrix} .$$

d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = -3x(t) + y(t) - z(t), \quad \dot{y}(t) = x(t) - 3y(t), \quad \dot{z}(t) = x(t) - y(t) - 2z(t)$$

mit $x(0) = y(0) = z(0) = 1$!

Lösung: Dies ist ein System homogener linearer Differentialgleichungen mit Matrix A; die gesuchte Lösung ist also

$$e^{At}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} & e^{-3t} - e^{-2t} \\ te^{-3t} & e^{-2t} - te^{-3t} & (1+t)e^{-3t} - e^{-2t} \\ te^{-3t} & -te^{-3t} & (1+t)e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ (1+t)e^{-3t} \\ (1+t)e^{-3t} \end{pmatrix} .$$

e) Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

Lösung: Da auch $\lim\limits_{t\to\infty}(1+t)e^{-3t}$ verschwindet, geht sie gegen null.

f) Ist das Langzeitverhalten dieser Lösung stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Lösung: Ja, denn alle Eigenwerte von A sind negativ.

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*

a) Welche Gleichgewichtslösungen hat das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}(t) = x(t)^2 - y(t)^2, \qquad \dot{y}(t) = y(t)^2 - z(t)^2, \qquad \dot{z}(t) = y(t)^2 + z(t)^2 - 8\,?$$

Lösung: Die ersten beiden Gleichungen des Systems

$$x^2 - y^2 = 0, \qquad y^2 - z^2 = 0 \quad \text{und} \quad y^2 + z^2 = 8$$

zeigen, daß $x^2 = y^2 = z^2$ sein muß; setzt man dies ein in die dritte Gleichung, folgt, daß der gemeinsame Wert der drei Quadrate gleich vier sein muß. Das System hat also die acht Gleichgewichtspunkte $(\pm 2, \pm 2, \pm 2)$.

b) Ist der Gleichgewichtspunkt im ersten Oktanten $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$ stabil?

Lösung: Die rechte Seite des Differentialgleichungssystems ist gegeben durch die Funktion

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ y^2 - z^2 \\ y^2 + z^2 - 8 \end{pmatrix}$$

mit JACOBI-Matrix

$$J_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 0 & 2y & -2z \\ 0 & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

Für den Gleichgewichtspunkt im ersten Oktanten ist $x = y = z = 2$, also ist dort

$$J_F(2,2,2) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Der Gleichgewichtspunkt $(2,2,2)$ ist genau dann stabil, wenn alle Eigenwerte dieser Matrix negativen Realteil haben. Aufgrund der speziellen Form der Matrix läßt sich das charakteristische Polynom leicht ausrechnen, allerdings können wir uns das hier auch schenken, denn die erste Spalte der Matrix zeigt sofort, daß der erste Einheitsvektor des $\mathbb{R}^3$ Eigenvektor zum Eigenwert vier ist. Damit gibt es einen positiven reellen Eigenwert, der Gleichgewichtspunkt ist also nicht stabil. (Die anderen Eigenwerte können uns gleichgültig sein, denn wenn die Gleichgewichtslösung instabil gegenüber Störungen in x-Richtung ist, kommt es für die bloße Beurteilung der Stabilität nicht mehr an auf das Verhalten in anderen Richtungen.)

Aufgabe 7: (*4 Punkte*)
Finden Sie den größten achsenparallelen Quader, der ganz im Ellipsoid

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 \le 1$$

enthalten ist!

Lösung: Da der Quader achsenparallel sein soll, gibt es positive reelle Zahlen x, y, z, so daß seine Ecken die acht Punkte $(\pm x, \pm y, \pm z)$ sind; sein Volumen ist dann

$$V(x, y, z) = 8xyz\,.$$

Diese Funktion muß also maximiert werden unter der Nebenbedingung

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 \le 1\,.$$

Der Gradient

$$\nabla V(x, y, z) = \begin{pmatrix} 8yz \\ 8xz \\ 8xy \end{pmatrix}$$

verschwindet genau dann, wenn mindestens zwei der drei Zahlen x, y, z verschwinden; das entstehende Volumen null ist sicherlich nicht maximal. Also muß der Punkt (x, y, z) auf dem Rand des Ellipsoids liegen.
Der Gradient der Ellipsoidgleichung ist

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ y/2 \\ 2z/9 \end{pmatrix}\,,$$

was nur im (uninteressanten) Nullpunkt verschwindet. In einem Maximum auf dem Rand muß es daher ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben mit

$$8yz = 2\lambda x, \quad 8xz = \lambda\frac{y}{2} \quad \text{und} \quad 8xy = \lambda\frac{2z}{9}$$

oder

$$\lambda = 4\frac{yz}{x} = 16\frac{xz}{y} = 36\frac{xy}{z}\,.$$

Da im Maximum keine der drei Zahlen verschwindet, können wir mit xyz multiplizieren (und der Einfachheit halber durch vier kürzen); wir erhalten

$$y^2z^2 = 4x^2z^2 = 9x^2y^2\,.$$

Kürzt man in der ersten Gleichung durch z^2, folgt $y = \pm 2x$; entsprechend zeigt Division von $y^2z^2 = 9x^2y^2$ durch y^2, daß $z = \pm 3x$ sein muß. Uns interessieren nur die positiven Werte, d.h.

$$y = 2x \quad \text{und} \quad z = 3x\,.$$

Einsetzen in die Ellipsengleichung

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = x^2 + x^2 + x^2 = 1$$

führt auf die Lösung

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{und} \quad z = \sqrt{3}\,.$$