WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

9. Februar 2002

Klausur und 16. Übungsblatt Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Zeigen Sie: $\cos^4 t - \sin^4 t = \cos 2t$

Lösung:

$$\begin{aligned}\cos^4 t - \sin^4 t &= (\cos^2 t + \sin^2 t)(\cos^2 t - \sin^2 t) = \cos^2 t - \sin^2 t \\ &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2 = \frac{\left(e^{2it}+2+e^{-2it}\right)+\left(e^{2it}-2+e^{-2it}\right)}{4} \\ &= \frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2} = \cos 2t\end{aligned}$$

2) Bestimmen Sie die FOURIER-Reihe der Funktion $f(t) = \cos|t|$!

Lösung: Da Cosinus eine gerade Funktion ist, ist $f(t) = \cos t$, und das ist auch bereits die FOURIER-Reihe von f.

3) *Richtig oder falsch:* Die FOURIER-Reihe der Funktion $f(t) = \sin(\cos t)$ enthält keine Cosinusterme.

Lösung: *Falsch:* Da Cosinus eine gerade Funktion ist, ist auch jede Funktion von $\cos t$ gerade; als gerade Funktion hat f daher keine Sinusterme in der FOURIER-Reihe. Da f nicht konstant ist, muß es also Cosinusterme geben.

4) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{12\times 12}$ mit $a_{k\ell} = i^{k-\ell}$ ist diagonalisierbar.

Lösung: *Richtig,* denn $a_{\ell k} = i^{\ell-k} = 1/i^{k-\ell}$ ist für jeden der vier möglichen Werte ± 1 und $\pm i$ von $a_{k\ell}$ gerade der konjugiert komplexe Wert; die Matrix ist also HERMITEsch und somit diagonalisierbar.

5) Bestimmen Sie reelle Zahlen a, b, c, d derart, daß die Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) + ay^{(3)}(t) + b\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + dy(t) = 0$$

die allgemeine Lösung $y(t) = C_1 e^{-2t} + \left(C_2 + tC_3 + t^2 C_4\right)e^{-t}$ hat!

Lösung: Bei dieser allgemeinen Lösung hat das charakteristische Polynom der Differentialgleichung die einfache Nullstelle -2 und die dreifache Nullstelle -1, ist also

$$(\lambda+2)(\lambda+1)^3 = (\lambda+2)(\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1) = \lambda^4+5\lambda^3+9\lambda^2+7\lambda+2\,,$$

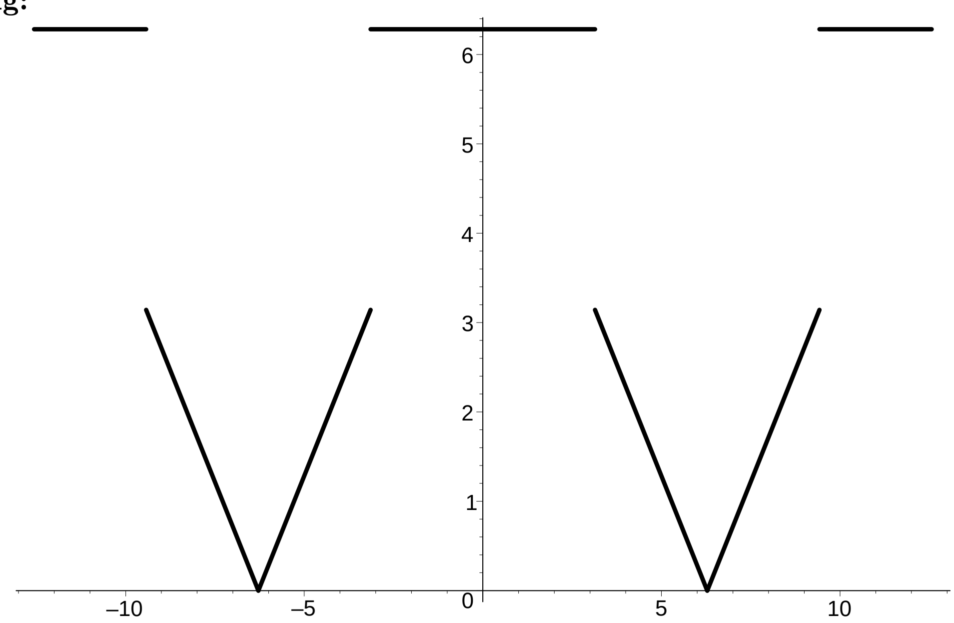
d.h. $a = 5$, $b = 9$, $c = 7$ und $d = 2$.

Aufgabe 1: (*8 Punkte*)
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode 4π, und für $t \in [-2\pi, 2\pi]$ sei

$$f(t) = \begin{cases} 2\pi + t & \text{für } -2\pi < t \le -\pi \\ 2\pi & \text{für } \ \ -\pi < t \le \ \ \pi \\ 2\pi - t & \text{für } \quad \pi < t \le \ 2\pi \end{cases}.$$

a) Skizzieren Sie f über dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$!

Lösung:



b) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f! Welche Symmetrien lassen sich dabei ausnutzen?

Lösung: f hat die Periode $T = 4\pi$, also die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2}$. Da die Funktion offensichtlich gerade ist, gibt es in der FOURIER-Reihe von f keine Sinusterme und wir können bei der Berechnung der verbleibenden Koeffizienten eine Fallunterscheidung einsparen, wenn wir beachten, daß für eine gerade Funktion mit Periode T stets gilt

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt = 2\int_0^{T/2} f(t)\,dt\,.$$

Der konstante Term ist das Periodenmittel

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} 2\pi\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - t)\,dt\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} 2\pi\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} t\,dt\right) = \frac{1}{2\pi}\left(4\pi^2 - 2\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{5\pi}{4}\,.$$

Die Koeffizienten der höheren Cosinusterme lassen sich berechnen als

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\frac{kt}{2}\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 2\pi\cos\frac{kt}{2}\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - t)\cos\frac{kt}{2}\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} 2\pi\cos\frac{kt}{2}\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} t\cos\frac{kt}{2}\,dt\right).$$

Im letzten Ausdruck verschwindet das erste Inegral, da hier ein Cosinus von null bis zu einem ganz- oder halbzahligen Vielfachen der Periodenlänge integriert wird. Für das zweite Integral berechnen wir zunächst durch partielle Integration eine Stammfunktion von $t\cos\omega t$:

$$\int t\cos\omega t\,dt = t\cdot\frac{\sin\omega t}{\omega} - \int\frac{\sin\omega t}{\omega}\,dt = \frac{t\sin\omega t}{\omega} + \frac{\cos\omega t}{\omega^2},$$

d.h.

$$\int t\cos\frac{kt}{2}\,dt = \frac{2t}{k}\sin\frac{kt}{2} + \frac{4}{k^2}\cos\frac{kt}{2}.$$

Somit ist

$$a_k = -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} t\cos\frac{kt}{2}\,dt = \frac{2}{k}\sin\frac{k\pi}{2} - \frac{4}{k}\sin k\pi + \frac{4}{\pi k^2}\left(\cos\frac{k\pi}{2} - \cos k\pi\right)$$
$$= \frac{2}{k}\sin\frac{k\pi}{2} + \frac{4}{\pi k^2}\left(\cos\frac{k\pi}{2} - \cos k\pi\right).$$

Für gerades $k = 2\ell$ ist

$$\sin\frac{k\pi}{2} = \sin\ell\pi = 0, \quad \cos\frac{k\pi}{2} = \cos\ell\pi = (-1)^\ell \quad \text{und} \quad \cos k\pi = 1,$$

also ist $a_k = 0$ für durch vier teilbare k und $-8/\pi k^2$ sonst.
Für ungerades $k = 2\ell + 1$ ist

$$\sin\frac{k\pi}{2} = \sin\left(\ell\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^\ell, \quad \cos\frac{k\pi}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \cos k\pi = \cos(2\ell + \pi) = \cos\pi = -1,$$

also ist

$$a_k = (-1)^\ell\left(\frac{2}{k} - \frac{4}{k^2\pi}\right).$$

Insgesamt ist also

$$a_k = \begin{cases} \frac{5\pi}{4} & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{falls } k \neq 0 \text{ durch vier teilbar} \\ \frac{-8}{\pi k^2} & \text{falls } k \text{ gerade, aber nicht durch vier teilbar} \\ (-1)^\ell\left(\frac{2}{k} - \frac{4}{k^2\pi}\right) & \text{falls } k = 2\ell + 1 \text{ ungerade} \end{cases}.$$

c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe gegen $f(t)$?

Lösung: Überall, wo f stetig ist, also für alle $t \in \mathbb{R}$ außer den ungeradzahligen Vielfachen von π. Dort konvergiert die FOURIER-Reihe gegen den Mittelwert $3\pi/2$ der beiden einseitigen Grenzwerte, während $f(t)$ gleich π oder 2π ist.

d) Tritt bei der Konvergenz das GIBBS-Phänomen auf?

Lösung: Ja, genau an diesen Sprungstellen.

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) Für eine gerade FOURIER-transformierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\widehat{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$.

Lösung:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(\cos\omega t + i\sin\omega t\big)\,dt\\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt + i\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\,.\end{aligned}$$

Die beiden Integrale in der letzten Zeile sind Realteil und Imaginärteil von $\widehat{f}(\omega)$, existieren also, und damit verschwindet das Sinusintegral, da $f(t)\sin\omega t$ für jedes ω eine ungerade Funktion ist. Also ist

$$\widehat{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\,.$$

b) Bestimmen Sie die FOURIER-Transformierte von $f(t) = e^{-|t|}$!

Lösung: Da $e^{-|t|}$ eine gerade Funktion ist, können wir *a)* anwenden und erhalten

$$\widehat{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt = 2\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\,.$$

Zweimalige partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}\int e^{-t}\cos\omega t\,dt &= e^{-t}\frac{\sin\omega t}{\omega} + \int e^{-t}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,dt = \frac{e^{-t}\sin\omega t}{\omega} + \frac{1}{\omega}\int e^{-t}\sin\omega t\,dt\\ &= \frac{e^{-t}\sin\omega t}{\omega} - \frac{e^{-t}\cos\omega t}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\int e^{-t}\cos\omega t\,dt\,.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)\int e^{-t}\cos\omega t\,dt = \left(\frac{e^{-t}\sin\omega t}{\omega} - \frac{e^{-t}\cos\omega t}{\omega^2}\right)\,.$$

Erweiterung mit ω^2 und Auflösung nach dem gewünschten Integral ergibt

$$\int e^{-t}\cos\omega t\,dt = \frac{\omega e^{-t}\sin\omega t\; - e^{-t}\cos\omega t}{\omega^2+1}\,.$$

Für $t \to \infty$ verschwinden beide Terme auf der rechten Seite; für $t = 0$ verschwindet der erste und der zweite ist eins. Somit ist

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t}\cos\omega t\,dt = \frac{1}{\omega^2+1} \quad \text{und} \quad \widehat{f}(\omega) = \frac{2}{\omega^2+1}\,.$$

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie für die Funktion $f(t) = \begin{cases} 2\pi + t & \text{für } -2\pi < t \le -\pi \\ 2\pi & \text{für } \ -\pi < t \le \ \pi \\ 2\pi - t & \text{für } \quad \pi < t \le 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die Ableitung im Distributionensinne!

Lösung: Die Ableitung im Distributionensinne ist die Ableitung der Distribution T_f; für eine Funktion φ aus dem SCHWARTZ-Raum ist dabei laut Vorlesung $\dot{T}_f(\varphi) = -T_f(\dot{\varphi})$, d.h.

$$\begin{aligned}
-\dot{T}_f(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\dot{\varphi}(t)\,dt = \int_{-2\pi}^{-\pi} (2\pi + t)\dot{\varphi}(t)\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\dot{\varphi}(t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - t)\dot{\varphi}(t)\,dt \\
&= \int_{-2\pi}^{2\pi} 2\pi\dot{\varphi}(t)\,dt + \int_{-2\pi}^{-\pi} t\dot{\varphi}(t)\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} t\dot{\varphi}(t)\,dt \\
&= 2\pi\big(\varphi(2\pi) - \varphi(-2\pi)\big) + t\varphi(t)\Big|_{-2\pi}^{-\pi} - \int_{-2\pi}^{-\pi} \varphi(t)\,dt - t\varphi(t)\Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \varphi(t)\,dt \\
&= 2\pi\big(\varphi(2\pi) - \varphi(-2\pi)\big) - \pi\varphi(-\pi) + 2\pi\varphi(-2\pi) - 2\pi\varphi(2\pi) + \pi\varphi(\pi) \\
&\qquad - \int_{-2\pi}^{-\pi} \varphi(t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} \varphi(t)\,dt \\
&= \pi\big(\varphi(\pi) - \varphi(-\pi)\big) - \int_{-2\pi}^{-\pi} \varphi(t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} \varphi(t)\,dt
\end{aligned}$$

nach der Regel über partielle Integration. Somit ist die Ableitung von T_f jene Distribution $\dot{T}_f$ mit

$$\dot{T}_f(\varphi) = \pi\big(\varphi(-\pi) - \varphi(\pi)\big) + \int_{-2\pi}^{-\pi} \varphi(t)\,dt\,.$$

b) Geben Sie diese Ableitung, gegebenenfalls unter Verwendung von $\delta(t)$, als „Funktion" an! Ist diese „Funktion" eindeutig bestimmt?

Lösung: Gesucht ist eine Funktion $F(t)$, so daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\varphi(t)\,dt = T(\varphi) = \pi\big(\varphi(\pi) - \varphi(-\pi)\big) - \int_{-2\pi}^{-\pi} \varphi(t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} \varphi(t)\,dt$$

ist. Für den ersten Term brauchen wir DIRAC-Distributionen; die Integrale können durch Rechteckimpulse definiert werden: Mit

$$F_1\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } -2\pi \le t \le -\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases} \quad \text{und} \quad F_2\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } \pi \le t \le 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

ist die gesuchte Ableitung als „Funktion" beispielsweise

$$F(t) = \pi\big(\delta(t + \pi) - \delta(t - \pi)\big) + F_1(t) - F_2(t)\,.$$

Das ist natürlich nicht eindeutig: Da F nur über die Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\varphi(t)\,dt$ für Funktionen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiert ist, ändert sich nichts, wenn man den Wert von F an endlich vielen Stellen verändert; selbst unendlich viele Stellen sind problemlos, falls sie isoliert liegen.

c) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte dieser Ableitung!

Lösung: Das ist die Summe der FOURIER-Transformierten der beiden DIRAC-Funktionen und der beiden Rechteckimpulse $F_1(t)$ und $-F_2(t)$, insgesamt also

$$\begin{aligned}\widehat{F}(\omega) &= \pi\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t+\pi)e^{-i\omega t}\,dt - \pi\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\pi)e^{-i\omega t}\,dt + \int_{-2\pi}^{-\pi}e^{-i\omega t}\,dt - \int_{\pi}^{2\pi}e^{-i\omega t}\,dt\\ &= \pi\big(e^{\pi i\omega} - e^{-\pi i\omega}\big) - \frac{1}{i\omega}\big(e^{\pi i\omega} - e^{2\pi i\omega} - e^{-2\pi i\omega} + e^{-\pi i\omega}\big)\\ &= 2\pi i\sin\pi\omega + \frac{2i}{\omega}\big(\cos\pi\omega - \cos 2\pi\omega\big)\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 4: (*4 Punkte*)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\ddot{y}(t) - y(t) = e^{-t}\cos t$, $\quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$!

Lösung: Für die LAPLACE-Transformierte $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ ist

$$s^2Y(s) = \mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\}(s), \quad \text{also} \quad \mathcal{L}\{\ddot{y}(t) - y(t)\}(s) = (s^2-1)Y(s)\,.$$

Da allgemein

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{-\lambda t}\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s+\lambda)$$

ist, transformiert die rechte Seite zu

$$\mathcal{L}\big\{e^{-t}\cos t\big\} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}\,,$$

d.h.

$$Y(s) = \frac{s+1}{(s^2-1)\big((s+1)^2+1\big)} = \frac{1}{(s-1)\big((s+1)^2+1\big)}$$

Nach der unten in der zweiten Zeile angegebenen Formel mit $a = b = c = 1$ ist dies die LAPLACE-Transformierte der Funktion

$$y(t) = \frac{e^t - e^{-t}\cos t - 2e^{-t}\sin t}{(1+1)^2+1^2} = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{2}{5}e^{-t}\sin t\,,$$

die somit das Anfangswertproblem löst.

b) Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$? War dieses Verhalten zu erwarten?

Lösung: Die Funktion geht gegen unendlich, was nicht sonderlich erstaunt, da wir hier eine Resonanz zwischen der Eigenschwingung des Systems und der (wenn auch gedämpften) anregenden Schwingung haben.

Aufgabe 5: (*12 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix};$$

wir entwickeln nach der zweiten Zeile: (Entwicklung nach der dritten Spalte wäre genauso einfach gewesen.)

$$\det(A-\lambda E) = -(1+\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(1+\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) = (1+\lambda)^2(1-\lambda)^2 .$$

Es gibt also die beiden Eigenwerte $\lambda = \pm 1$, die jeweils algebraische Vielfachheit zwei haben.

Zur Bestimmung der geometrischen Vielfachheiten müssen wir die Dimensionen der Eigenräume berechnen: Die erste Zeile der Matrix

$$A+E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

zeigt, daß die zweite Komponente jedes Eigenvektors verschwinden muß; wegen der vierten Zeile gilt damit das Gleiche auch für die vierte. Alsdann zeigt die dritte Zeile, daß die erste und die dritte Komponente gleich sein müssen; der Eigenraum wird also aufgespannt von

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Der Matrix

$$A-E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sieht man sofort an, daß

$$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor ist. Die zweite (oder vierte) Zeile der Matrix zeigt, daß für jeden Eigenvektor die zweite Komponente verschwinden muß; aus der ersten und der dritten Zeile folgt damit das Verschwinden der ersten und der vierten Komponente. Also wird der Eigenraum von $\vec{b}_3$ aufgespannt. Somit haben beide Eigenwerte geometrische Vielfachheit eins.

b) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren von A!

Lösung: Da beide Eigenwerte um eins kleinere geometrische als algebraische Vielfachheit haben, müssen wir jeweils noch einen Hauptvektor der Stufe zwei berechnen. Für $\lambda = -1$

ist

$$(A - \lambda E)^2 = (A + E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix annuliert natürlich den Eigenvektor $\vec{b}_1$; einen davon linear unabhängigen Hauptvektor erhalten wir, wenn wir die erste und die dritte Komponente der Lösung willkürlich auf null setzen: Dann müssen die zweite und die vierte Komponente gleich sein; wir erhalten also den Vektor

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als zweiten Basisvektor des Hauptraums zum Eigenwert -1.

Für $\lambda = 1$ ist

$$(A - \lambda E)^2 = (A - E)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

die davon annullierten Vektoren haben beliebige dritte und vierte Komponente, aber die erste und die zweite Komponente müssen verschwinden. Der einfachste von $\vec{b}_3$ linear unabhängige Vektor mit dieser Eigenschaft ist

$$\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

und damit haben wir eine Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ des $\mathbb{R}^4$ aus Eigen- und Hauptvektoren gefunden.

c) Berechnen Sie die Matrix e^{At} !

Lösung: Wir müssen zunächst die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$ bezüglich der Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ bestimmen. Da in den Spalten dieser Matrix die Bilder der Basisvektoren stehen, brauchen wir also die Vektoren $A\vec{b}_i$, was im Falle der beiden Eigenvektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_3$ kein Problem ist: Die werden einfach mit dem zugehörigen Eigenwert ± 1 multipliziert. Für $\vec{b}_2$ müssen wir rechnen:

$$A\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0, & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 .$$

Für $\vec{b}_4$ müssen wir ebenfalls das Produkt $A\vec{b}_4$ berechnen; da $\vec{b}_4$ der vierte Standardbasisvektor ist, erhalten wir einfach die vierte Spalte der Matrix, d.h.

$$A\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{b}_3 + \vec{b}_4 .$$

Somit ist die Abbildungsmatrix bezüglich der neuen Basis gleich

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Diagonalmatrix D und der zweite Summand N offensichtlich kommutieren. Also ist

$$\begin{aligned} e^{Mt} &= e^{Dt}e^{Nt} = e^{Dt}(E + Nt) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} & te^{t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies muß nun noch zurücktransformiert werden auf die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$; die Matrix des Basiswechsels von der Standardbasis zur neuen Basis enthält die Vektoren $\vec{b}_i$ als Spalten, ist also

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse dazu berechnet man entweder nach GAUSS, oder aber, indem man die Vektoren $\vec{e}_i$ der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ in der neuen Basis hinschreibt: Da

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad \vec{b}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_4, \quad \vec{b}_3 = \vec{e}_3 \quad \text{und} \quad \vec{b}_4 = \vec{e}_4$$

ist, folgt

$$\vec{e}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_3, \quad \vec{e}_2 = \vec{b}_2 - \vec{b}_4, \quad \vec{e}_3 = \vec{b}_3 \quad \text{und} \quad \vec{e}_4 = \vec{b}_4\,,$$

d.h. die Matrix des Basiswechsels von der neuen Basis zur Standardbasis ist

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und Ausmultiplizieren führt auf

$$e^{At} = Be^{Mt}B^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ e^{-t} - e^{t} & t(e^{-1} - e^{t}) & e^{t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} - e^{t} & 0 & e^{t} \end{pmatrix}.$$

d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{w}(t) = x(t) - w(t), \quad \dot{x}(t) = -x(t), \quad \dot{y}(t) = y(t) + z(t) - 2w(t), \quad \dot{z}(t) = z(t) - 2x(t)$$

mit $w(0) = x(0) = y(0) = z(0) = 1$!

Lösung: Dies ist ein System homogener linearer Differentialgleichungen mit Matrix A; die gesuchte Lösung ist also

$$e^{At}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ e^{-t} - e^{t} & t(e^{-1} - e^{t}) & e^{t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} - e^{t} & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)e^{-t} \\ e^{-t} \\ (1+t)e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

e) Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

Lösung: Da auch $\lim\limits_{t\to\infty}(1+t)e^{-t}$ verschwindet, geht sie gegen null.

f) Ist das Langzeitverhalten dieser Lösung stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Lösung: Nein, denn A hat auch den Eigenwert $+1$. Stört man die Anfangsbedingungen auch nur leicht in Richtung des zugehörigen Eigenvektors oder eines der entsprechenden Hauptvektoren, kommen Terme mit e^t und te^t ins Spiel, die Lösungsfunktionen gehen also betragsmäßig gegen unendlich statt gegen null.

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungskurven $F(y,t) = C$ der Differentialgleichung

$$(4y(t)^3 + t^3)\dot{y}(t) + y(t)^4 + (t^3 + 3t^2)y(t) = 0\,!$$

Lösung: Dies ist eine Gleichung der Form

$$a(y,t)\dot{y}(t) + b(y,t)y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad a(y,t) = 4y^3 + t^3 \quad \text{und} \quad b(y,t) = y^4 + (t^3 + 3t^2)y\,.$$

Leider sind $\dfrac{\partial a}{\partial t} = 3t^2$ und $\dfrac{\partial b}{\partial y} = 4y^3 + t^3 + 3t^2$ verschieden, die Differentialgleichung ist also nicht exakt. Da

$$\frac{\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial t}}{a(y,t)} = \frac{4y^3 + t^3}{4y^3 + t^3} = 1$$

nicht von y abhängt und $\int 1\,dt = t + C$ ist, erhalten wir e^t als integrierenden Faktor. Zu

$$a(y,t)e^t = (4y^3 + t^3)e^t \quad \text{und} \quad b(y,t)e^t = \big(y^4 + (t^3 + 3t^2)y\big)e^t$$

gibt es also eine Funktion F, die ersteren Ausdruck als partielle Ableitung nach y und letztere als partielle Ableitung nach t hat. Mit den im Anhang angegebenen Formeln folgt nach kurzer Rechnung, daß

$$\int a(y,t)e^t\,dt = \int b(y,t)e^t\,dt = e^t(y^4 + t^3y)$$

ist; daher können wir zum Beispiel $F(y,t) = e^t(y^4 + t^3y)$ nehmen. Die Lösungskurven sind also implizit gegeben durch $e^t(y^4 + t^3y) = C$.

b) Für welche $y_0 \in \mathbb{R}$ gibt es eine Konstante C, so daß $F(y,t) = C$ in einer Umgebung von $(y_0, 0)$ nach y aufgelöst werden kann?

Lösung: Nach dem Satz über implizite Funktionen darf die partielle Ableitung nach y dort nicht verschwinden. Hier ist

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(F(y,t) - C\big) = e^t(4y^3 + t^3)\,,$$

was für $y = y_0$ und $t = 0$ den Wert $4e^t y_0^3$ annimmt. Also kann y_0 jede beliebige Zahl außer der Null sein.

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*

a) Welche Gleichgewichtslösungen hat das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}(t) = x(t) - 2y(t)^2 + 12, \qquad \dot{y}(t) = x(t)^2 - 4y(t)^2\,?$$

Lösung: Das Gleichungssystem

$$x - 2y^2 + 12 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 - 4y^2 = 0$$

zeigt, daß $x = \pm 2y$ sein muß; setzt man dies ein in die erste Gleichung, folgt für $x = 2y$, daß $2y - 2y^2 + 12 = 0$ oder $y^2 - y = 6$ sein muß. Quadratische Ergänzung macht daraus

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 6\frac{1}{4} \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{2} \pm 2\frac{1}{2}\,,$$

d.h. $y = 3$ und $x = 6$ oder $y = -2$ und $x = -4$.
Für $x = -2y$ folgt entsprechend $-2y - 2y^2 + 12 = 0$ oder $y^2 + y = 6$, d.h.

$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 6\frac{1}{4} \quad \text{oder} \quad y = -\frac{1}{2} \pm 2\frac{1}{2}\,,$$

so daß die Lösungen hier $y = 2$ und $x = -4$ sowie $y = -3$ und $x = 6$ sind. Es gibt also die vier Gleichgewichtspunkte $(-4, \pm 2)$ und $(6, \pm 3)$.

b) Ist der Gleichgewichtspunkt im ersten Quadranten $(x > 0,\ y > 0)$ stabil?

Lösung: Die rechte Seite des Differentialgleichungssystems ist gegeben durch die Funktion $F(x,y) = \begin{pmatrix} x - 2y^2 + 12 \\ x^2 - 4y^2 \end{pmatrix}$ mit Jacobi-Matrix ist $J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -4y \\ 2x & -8y \end{pmatrix}$.
Für den Gleichgewichtspunkt im ersten Quadranten ist $x = 6$ und $y = 3$, also hat dort $J_F(6,3) = \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 12 & -24 \end{pmatrix}$ das charakteristische Polynom $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -12 \\ 12 & -24-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 24) + 12^2 = \lambda^2 + 23\lambda + 120$.
Für dessen Nullstellen ist

$$\left(\lambda + 11\frac{1}{2}\right)^2 + 120 - \left(121 + 11 + \frac{1}{4}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = -11\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4}} = -11\frac{1}{2} \pm 3\frac{1}{2}\,.$$

Auch ohne daß wir die beiden Ergebnisse -8 und -15 berechnen, ist klar, daß sie negativ sind; der Gleichgewichtspunkt ist also stabil.

Formelanhang

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at} - e^{-bt}\cos ct - \frac{a+b}{c}e^{-bt}\sin ct\right\}(s) = \frac{(a+b)^2 + c^2}{(s-a)\big((s+b)^2 + c^2\big)}$$

$$\int te^t\,dt = (t-1)e^t + C, \quad \int t^2e^t\,dt = (t^2-2t+2)e^t + C, \quad \int t^3e^t\,dt = (t^3-3t^2+6t-6)e^t + C$$