Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

14. Februar 2002

17. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Verdoppelt man alle Werte einer Meßreihe, verdoppelt sich dadurch auch die Standardabweichung.

Lösung: *Richtig:* Da sich auch der Mittelwert verdoppelt, vervierfacht sich die Varianz; die Standardabweichung als deren Quadratwurzel verdoppelt sich also.

2) Nach dem Brechungsgesetz gilt für die Winkel α des einfallenden und β des gebrochenen Strahls die Beziehung $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$, wobei n der (relative) Brechungsindex ist. Wie wirken sich Fehler bei der Bestimmung von α und β auf n aus?

Lösung: Nach dem Fehlerforpfanzungsgesetz ist

$$\Delta n \approx \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial\alpha}\Delta\alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial\beta}\Delta\beta\right)^2} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}(\Delta\alpha)^2 + \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^4\beta}(\Delta\beta)^2}\,.$$

3) Richtig oder falsch: Der Korrelationskoeffizient der zehn Wertepaare $\left(\cos\frac{i}{10}, \frac{i}{10}\right)$ für $i = 1, \dots, 10$ ist negativ.

Lösung: *Richtig,* denn im Intervall $[0, 1]$ fällt der Cosinus monoton. (Nachrechnen führt auf $\rho \approx -0{,}979$.)

4) Eine Meßreihe habe Mittelwert 3,8 und Standardabweichung 0,1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der dritte Meßwert größer als vier?

Lösung: Vier ist um zwei Standardabweichungen größer als der Mittelwert, die Wahrscheinlichkeit, daß der dritte (oder sonst irgendein fester) Meßwert größer ist, liegt also bei $1 - F(2) \approx 0{,}02275$ mit

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt\,.$$

5) Zur Bestimmung des wahren Werts einer physikalischen Meßgröße werde diese fünfzigmal gemessen; die entsprechende Meßreihe habe einen Mittelwert von 3,145 und eine Standardabweichung von 0,07. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der wahre Wert zwischen 3,14 und 3,145?

Lösung: $\frac{3{,}14-3{,}145}{0{,}07} \approx -0{,}0714$; die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also ungefähr

$$F(0) - F(-0{,}0714) = \frac{1}{2} - \big(1 - F(0{,}0714)\big) = F(0{,}0714) - \frac{1}{2} \approx 0{,}0285\,.$$

6) Bestimmen Sie ein Intervall, in dem der wahre Wert mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit liegt.

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Wert um höchstens z Standardabweichungen vom Mittelwert entfernt liegt, ist $F(z)-F(-z) = 2F(z)-1$. Anhand einer Tabelle für F oder durch Rechnung läßt sich näherungsweise der Wert $z \approx 2{,}5758$ bestimmen, für den dies gleich 0,99 wird. Das gesuchte Intervall ist also ungefähr

$$[3{,}145 - 2{,}5758 \cdot 0{,}07,\ \ 3{,}145 + 2{,}5758 \cdot 0{,}07] = [2{,}965,\ 3{,}325]\,.$$

7) Die Zufallsvariable X habe Mittelwert $\overline{x}$ und Standardabweichung σ. Bestimmen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung der Zufallsvariablen $U = 2X + 1$!

Lösung: Der Mittelwert ist natürliche einfach $\overline{u} = 2\overline{x} + 1$; für jedes $u = 2x + 1 \in \mathbb{R}$ ist daher $(u - \overline{u})^2 = 4(x - \overline{x})^2$. Die Standardabweichung von U ist somit gleich 2σ.

8) Richtig oder falsch: Sind X, Y zwei beliebige, eventuell voneinander abhängige Zufallsvariable, so sind die beiden Zufallsvariablen $X+Y$ und $X-Y$ voneinander unabhängig.

Lösung: *Falsch:* Ist etwa $X = 2Y$, so sind $X + Y = 3Y$ und $X - Y = Y$ sicherlich nicht unabhängig voneinander.

Aufgabe 1: (*8 Punkte*)

Ein Fahrzeug bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 entlang einer geraden Straße. Ab dem Zeitpunkt t_0 wirkt eine konstante Bremskraft.

a) Zeigen Sie, daß sich danach, bis zum Stillstand, der Weg als Funktion der Zeit in der Form $s(t) = at^2 + bt + c$ schreiben läßt mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Lösung: Klar: Eine konstante Bremskraft impliziert eine konstante Bremsbeschleunigung, $\ddot{s}(t)$ ist also konstant.

b) An $N \geq 10$ Punkten $s_1, \dots, s_N$, wird die Zeit t_i gestoppt, zu der das Fahrzeug dort vorbeifährt. Finden Sie ein lineares Gleichungssystem für die Werte a, b, c, die am besten zu N gemessenen Punkten (s_i, t_i) passen!

Lösung: Nach der Methode der kleinsten Quadrate müssen wir die Funktion

$$F(a, b, c) = \sum_{i=1}^{N} \big(s_i - (at_i^2 + bt_i + c)\big)^2$$

minimieren. Im Minimum verschwinden die drei partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial a} &= 2(s_i - at_i^2 - bt_i - c)(-t_i^2) = 2a\sum_{i=1}^{N} t_i^4 + 2b\sum_{i=1}^{N} t_i^3 + 2c\sum_{i=1}^{N} t_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N} s_i t_i^2 \\
\frac{\partial F}{\partial b} &= 2(s_i - at_i^2 - bt_i - c)(-t_i) = 2a\sum_{i=1}^{N} t_i^3 + 2b\sum_{i=1}^{N} t_i^2 + 2c\sum_{i=1}^{N} t_i - 2\sum_{i=1}^{N} s_i t_i \quad \text{und} \\
\frac{\partial F}{\partial c} &= 2(s_i - at_i^2 - bt_i - c)(-1) \ = 2a\sum_{i=1}^{N} t_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{N} t_i + 2Nc - 2\sum_{i=1}^{N} s_i\,,
\end{aligned}$$

die gesuchten Koeffizienten sind also Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
a\sum_{i=1}^{N} t_i^4 + b\sum_{i=1}^{N} t_i^3 + c\sum_{i=1}^{N} t_i^2 &= \sum_{i=1}^{N} s_i t_i^2\\
a\sum_{i=1}^{N} t_i^3 + b\sum_{i=1}^{N} t_i^2 + c\sum_{i=1}^{N} t_i &= \sum_{i=1}^{N} s_i t_i\\
a\sum_{i=1}^{N} t_i^2 + b\sum_{i=1}^{N} t_i + c\cdot N \quad &= \sum_{i=1}^{N} s_i\,.
\end{aligned}$$

c) In einem konkreten Fall wurde die Zeit alle 10 m gestoppt mit folgenden Ergebnissen:

s [m]:	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
t [sec]:	1,07	2,25	2,74	3,53	4,52	5,83	6,05	7,38	8,84	11,51

Berechnen Sie Schätzwerte für a, b, c und für den Zeitpunkt, zu dem das Fahrzeug zum Stillstand kommt!

Lösung: Hier ist $N = 10$ und

$$\sum_{i=1}^{10} t_i = 53{,}72, \quad \sum_{i=1}^{10} t_i^2 = 382{,}2878, \quad \sum_{i=1}^{10} t_i^3 = 3206{,}719616, \quad \sum_{i=1}^{10} t_i^4 = 29775{,}04993$$

$$\sum_{i=1}^{10} s_i t_i = 3815{,}40 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{10} s_i t_i^2 = 31097{,}6580\,.$$

Damit sind alle Koeffizienten des linearen Gleichungssystems bekannt; die Lösung ist

$$a \approx -0{,}5359, \quad b \approx 15{,}7811 \quad \text{und} \quad c \approx -9{,}2885\,.$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist

$$v(t) = \dot{s}(t) = 2at + b\,;$$

sie wird null zum Zeitpunkt

$$t = -\frac{b}{2a} \approx 14{,}72\,.$$

Aufgabe 2: (*7 Punkte*)

Der CPI für Deutschland hatte in den letzten Jahren folgende Werte:

Jahr:	1980–1985	1988–1992	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
CPI:	8,14	8,13	8,14	8,27	8,23	7,9	8,0	7,6	7,4

a) Berechnen Sie die Ausgleichsgerade für diese Daten!

Lösung: Da die ersten beiden Werte nicht für einzelne Jahre, sondern für Fünfjahresintervalle gegeben sind, müssen wir zunächst dafür geeignete Zeitpunkte einsetzen; am besten die Intervallmitten. Dies führt auf die modifizierte Tabelle

Jahr:	1982,5	1990	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
CPI:	8,14	8,13	8,14	8,27	8,23	7,9	8,0	7,6	7,4

Darauf lassen sich die Formeln aus der Vorlesung unmittelbar anwenden und führen auf die Ausgleichsgerade

$$\mathit{CPI} \approx 63{,}19583368 - 0{,}02767227235 \cdot \mathit{Jahr}\,.$$

b) Wie groß ist der Korrelationskoeffizient?

Lösung: $\rho \approx -0{,}5413247341$, was nicht sonderlich gut ist. In der Tat zeigen die Datenpunkte einen deutlichen Knick Ende der Neunzigerjahre.

c) In welchem Jahr ist der CPI laut Ausgleichsgerade bei Null angelangt?

Lösung: Die formale Lösung 2283,724 spricht für 2284. Da das lineare Modell die Daten nicht gut beschreibt, muß das allerdings nicht sonderlich ernst genommen werden.

Aufgabe 3: (*7 Punkte*)

Zwischen 1911 und 1960 wurden jedes Jahr die mittleren Oktobertemperaturen in München gemessen; der Mittelwert der 50 Werte ist 7,974 und die Standardabweichung 1,416. Wir nehmen an, die Meßwerte seien normalverteilt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die mittlere Temperatur in einem bestimmten Jahr zwischen sieben und acht Grad liegt?

Lösung: Die Normalisierungen der beiden Werte sind

$$\frac{7-7{,}974}{1{,}416} \approx -0{,}6879 \quad \text{und} \quad \frac{8-7{,}974}{1{,}416} \approx 0{,}0184\,;$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also etwa

$$F(0{,}0184) - F(-0{,}6879) = F(0{,}0184) - 1 + F(0{,}6879) \approx 0{,}2616$$

mit

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt\,.$$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie unter sechs Grad sinkt?

Lösung:

$$F\left(\frac{6-7{,}974}{1{,}416}\right) \approx F(-1{,}394) = 1 - F(1{,}394) \approx 0{,}0816$$

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie auf über zehn Grad steigt?

Lösung:

$$1 - F\left(\frac{10-7{,}974}{1{,}416}\right) \approx 1 - F(1{,}431) \approx 0{,}0752$$

d) Wie warm muß es werden, daß man von einem „Jahrhundertherbst“, reden kann, d.h. einen Oktober, der so warm ist, wie es nur einmal alle hundert Jahre vorkommt?

Lösung: Der Wert z, für den $F(z) = 0{,}99$ ist, kann mittels Tabelle oder Rechnung näherungsweise bestimmt werden; er liegt bei etwa 2,326. Die gesuchte mittlere Mindestemperatur für einen Jahrhundertherbst liegt also etwa bei

$$7{,}974 + 2{,}326 \cdot 1{,}416 \approx 11{,}27$$

Grad.

W E I T E R H I N   S C H Ö N E   F E R I E N !