WOLFGANG K. SEILER A5, C201
Tel. 2515

4. Februar 2002

15. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Falls f in einem Punkt $\mathbf{x}$ des Würfels $-1 \le x_i \le 1$ für $i = 1, \dots, n$ ein Maximum annimmt, ist dort $\operatorname{grad} f = \vec{0}$.

Lösung: *Falsch;* die Funktion $f(x_1, \dots, x_n) = \sum x_i$ etwa hat ihr Maximum im Punkt $(1, \dots, 1)$, und dort, wie überall, sind alle Komponenten des Gradienten gleich eins.

2) *Richtig oder falsch:* f sei auf $D = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}\| < 2 \right\}$ definiert und ∇f sei dort nirgends gleich dem Nullvektor. Dann nimmt f sowohl sein Maximum als auch sein Minimum in $M = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}\| \le 1 \right\}$ auf der Einheitssphäre $\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}\| = 1 \right\}$ an.

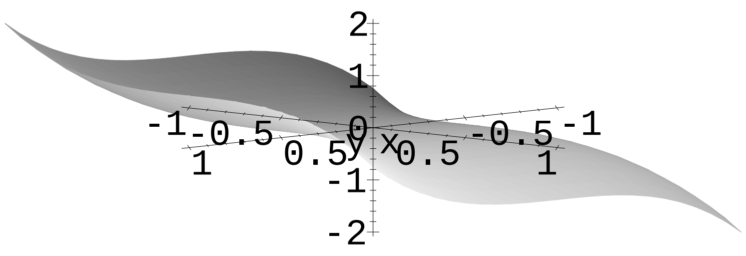
Lösung: *Richtig:* Da M abgeschlossen und beschränkt, also kompakt ist, muß f dort sein Maximum und sein Minimum annehmen. (Da ∇f als existent vorausgesetzt wird, ist f insbesondere stetig.) Würde einer dieser Werte im Innern angenommen, müßte dort ∇f verschwinden.

3) *Richtig oder falsch:* Falls die stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nirgends ein Maximum hat, ist sie unbeschränkt.

Lösung: *Falsch:* Die Funktion $1 - e^{x^2+y^2}$ ist überall kleiner als eins, hat aber kein Maximum in $\mathbb{R}^2$, da sie mit wachsendem Betrag von x und y immer größer wird.

4) Konstruieren Sie eine mindestens zweifach differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die keine der beiden partiellen Ableitungen überall verschwindet, aber $\nabla f(0,0) = \vec{0}$ ist, ohne daß der Nullpunkt Maximum, Minimum oder Sattelpunkt wäre!

Lösung: z.B. $f(x,y) = x^3 - y^3$; siehe Abbildung.



5) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ist positiv definit.

Lösung: *Falsch,* denn ihre Determinante ist null. (Die quadratische Form dazu ist $x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2$, und das verschwindet nicht nur im Nullpunkt, sondern auf der ganzen ersten Winkelhalbierenden; die Matrix ist also, obwohl die Form keine negativen Werte annehmen kann, nur positiv semidefinit.)

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)
Bestimmen Sie alle (lokalen) Maxima und Minima sowie die Sattelpunkte der Funktion $f(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$ in $\mathbb{R}^2$!

Lösung: Die erste Komponente des Gradienten

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -3y^2 + 3x^2 \\ 4y^3 - 6xy \end{pmatrix}$$

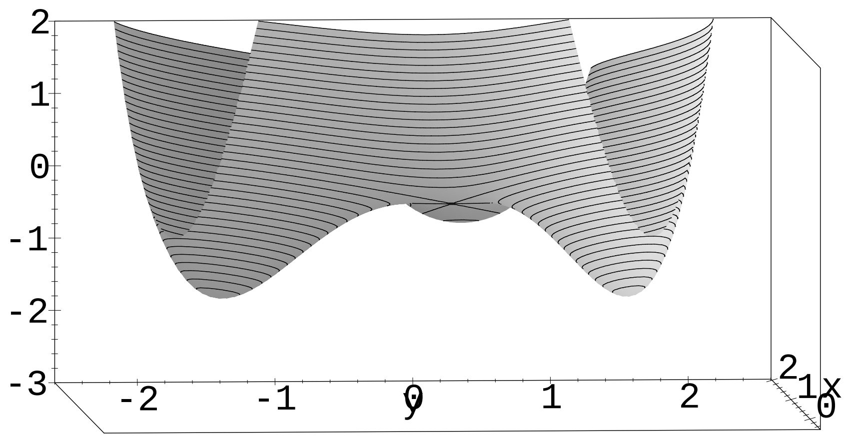
verschwindet genau dann, wenn $x = \pm y$ ist. Alsdann verschwindet die zweite Komponente genau dann, wenn $4y^3 = \pm 6y^2$ ist.
Dies ist sicherlich dann der Fall, wenn y verschwindet; alsdann verschwindet auch $x = \pm y$ und auch $f(0,0) = 0$. Da $f(x,0) = x^3$ in der Umgebung des Nullpunkts sowohl positive als auch negative Werte annimmt, ist der Nullpunkt weder Maximum noch Minimum; er ist auch kein Sattelpunkt im Sinne der Vorlesung, da die Hesse-Matrix

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & 12y^2 - 6x \end{pmatrix}$$

dort verschwindet, also nur null als Eigenwert hat.
Für $y \neq 0$ können wir die Gleichung $4y^3 = \pm 6y^2$ durch $4y^2$ dividieren und erhalten $y = \pm\frac{3}{2}$ und $x = \frac{3}{2}$. Hier hat

$$H\left(\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 9 & \mp 9 \\ \mp 9 & 18 \end{pmatrix}$$

Determinante 81 und positive Einträge auf der Hauptdiagonalen, ist also positiv definit. Somit nimmt f dort Minima an.



Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

a) Ein Produkt werde aus drei Resourcen hergestellt, die jeweils 80 DM, 12 DM *bzw.* 10 DM pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können für 24 000 DM maximal gefertigt werden?

Lösung: Offensichtlich sind nur nichtnegative Werte für x, y und z sinnvoll. Falls man daher zwei der Variablen festhält, ist

$$f(x,y,z) = 50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$$

monoton in der dritten; da auch die Kostenfunktion

$$g(x,y,z) = 80x + 12y + 10z$$

diese Eigenschaft hat, wird das Maximum in einem Punkt angenommen, in dem die Kosten das Limit erreichen, d.h. $g(x,y,z) = 24\,000$.
Dort müssen die Gradienten von f und $g - 24\,000$, also

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 20x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} \\ 10x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g = \begin{pmatrix} 80 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix},$$

linear abhängig sein; da ∇g nirgends verschwindet, muß es somit ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, so daß $\nabla f = \lambda \nabla g$ ist oder

$$\begin{aligned} 20x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} &= 80\lambda \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} &= 12\lambda \\ 10x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} &= 10\lambda\,. \end{aligned}$$

Durch Kürzen kann man alle rechten Seiten zu λ machen; um Nenner zu vermeiden, ist es allerdings besser, sie zu 12λ zu machen; dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 3x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} &= 12\lambda \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} &= 12\lambda \\ 12x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} &= 12\lambda\,. \end{aligned}$$

Daher ist

$$3x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} = 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} = 12x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5}\,.$$

Multiplikation mit $x^{3/5}y^{4/5}z^{4/5}$ macht daraus

$$3yz = 10xz = 12xy\,.$$

Da das Maximum der Produktionsfunktion f auf jeden Fall positiv ist, kann dort keine der drei Variablen verschwinden; wir können also unbesorgt kürzen und erhalten die drei Gleichungen

$$3y = 10x, \quad 10z = 12y \quad \text{und} \quad 3z = 12x\,,$$

d.h.

$$z = 4x \quad \text{und} \quad y = \frac{10}{3}x\,.$$

Unter diesen Bedingungen ist

$$g(x,y,z) = 80x + 40x + 40x = 160x\,;$$

dies ist genau dann gleich 24 000, wenn $x = 150$ ist. Damit kennen wir auch

$$y = \frac{10}{3}x = 500, \quad z = 4x = 600\,,$$

und

$$f(x,y,z) = 50 \cdot 150^{\frac{2}{5}} \cdot 500^{\frac{1}{5}} \cdot 600^{\frac{1}{5}} = 50 \cdot \sqrt[5]{150^2 \cdot 500 \cdot 600} = 50\sqrt[5]{76750\,000\,000} \approx 92{,}44\,.$$

Also lassen sich maximal 92 Einheiten fertigen.

b) Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von 24 000 DM zu erhöhen?

Lösung: Dazu müssen wir den LAGRANGEschen Multiplikator λ kennen. Aus der dritten Gleichung des obigen Systems ergibt er sich zu

$$\lambda = x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} = \sqrt[5]{\frac{150^2 \cdot 500}{600^4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{11520}} \approx 0{,}154\,.$$

Der Kehrwert davon ist ungefähr 6,49; ab etwa diesem Preis pro Einheit lohnt sich die Mehrinvestition.

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Beschreiben Sie die Menge

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1 \right\}$$

geometrisch!

Lösung: Das ist natürlich eine (Voll-)Ellipse mit Halbachsen 2 und 3.

b) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$ in M!

Lösung: $\nabla f = \binom{2x}{2y-2}$ verschwindet nur im Punkt $(0,\ 1)$; dort (wie überall) ist die HESSE-Matrix

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

als positives Vielfaches der Einheitsmatrix positiv definit, also hat f dort ein Minimum. Dieses liegt in der Ellipse M, ist also eine Lösung.

Alle weiteren Extrema müssen auf dem Rand liegen. Der Gradient der Ellipsengleichung ist $\binom{x/2}{2y/9}$; da er nur im Nullpunkt verschwindet, der nicht auf der (Rand)-Ellipse liegt, gibt es für jedes weitere Extremum ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß

$$2x = \lambda\frac{x}{2} \quad \text{und} \quad 2y - 2 = 2\lambda\frac{y}{9}$$

ist, d.h.

$$(4-\lambda)x = 0 \quad \text{und} \quad (9-\lambda)y = 9\,.$$

Ist $x = 0$, so ist wegen der Ellipsengleichung $y = \pm 3$ und λ läßt sich aus der zweiten Gleichung bestimmen; andernfalls ist $\lambda = 4$, also $y = 9/5$ und aufgrund der Ellipsengleichung $x = \pm 2/5$. Die Funktionswerte sind jeweils

$$f(0,\pm 3) = 9 \mp 6 = \begin{cases} 3 \\ 15 \end{cases} \quad \text{und} \quad f\left(\frac{9}{5}, \pm\frac{2}{5}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{5} \\ 7 \end{cases}.$$

Da die zu optimierende Funktion auf dem Rand der Ellipse stetig ist, müssen dort also in $(0,3)$ und $(9/5, 2/5)$ Minima vorliegen und in den anderen beiden Punkten Maxima.