Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge zu den kleinen Übungen am 7. Februar 2002

a) Welche der folgenden Matrizen ist positiv definit?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie alle Extrema und Sattelpunkte der Funktion $h(x,y) = x^8 - y^4$ auf $\mathbb{R}^2$!

c) Berechnen Sie alle Extrema der Funktion $k(x,y) = x^3 - x^2y + y^2x - y^3$ auf $\mathbb{R}^2$!

d) Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion $\ell(x,y) = \sin x \cos y$ auf $\mathbb{R}^2$!

e) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y) = xy$ auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$!

f) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y,z) = xyz$ auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$!

g) Bestimmen Sie den größten Quader mit achsenparallelen Kanten, der im Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

liegt!

h) Bestimmen Sie den Maximalwert der Funktion $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 \le 1$!

i) Die Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die Gleichung

$$(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 ,$$

wobei die Determinante der symmetrischen 2×2-Matrix A von Null verschieden sei. Bestimmen Sie jene Punkte der Quadrik, in denen der Abstand zum Punkt $(0,0)$ ein relatives Minimum annimmt!

j) Lassen sich diese Punkte auch geometrisch interpretieren?

k) Bestimmen Sie den Maximalwert der Funktion $f(x,y) = x^2 + 6xy - y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 \le 36$!

l) Bestimmen Sie die Maxima und Minima der Funktion $f(x,y,z) = xyz$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \le 1$!

m) Beschreiben Sie die Menge

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1 \right\}$$

geometrisch!

n) Bestimmen Sie die Maxima und Minima der Funktion $f(x,y) = x - 2x^2 - 3y^2$ auf M !