Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge zu den kleinen Übungen am 10. Januar 2002

Die Fragen k) bis m) vom letzten Mal sind auch dieses Jahr noch sehr wichtig!

a) Welche Lösungen hat die Gleichung $x^4 - 8x^3 - 34x^2 + 8x + 33 = 0$?

b) ... und $x^4 + 17x^3 + 69x^2 - 17x - 70 = 0$?

c) ... und $3x^6 + 6x^5 - 12x^4 - 30x^3 - 3x^2 + 24x + 12 = 0$?

d) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$!

e) V sei der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens 200. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} V \to V \\ x(t) \mapsto \ddot{x}(t) \end{cases} !$$

f) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ x(t) \mapsto \dot{x}(t) \end{cases} !$$

g) Ist die Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ Hermitesch?

h) Was ist e^C *bzw.* e^{Ct} ?

i) Berechnen Sie $e^{\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}}$!

j) Für Mutige: Berechnen Sie $e^{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$! *(Antwort steht im Skriptum, Seite 211.)*

k) Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist ${}^tAA$ symmetrisch.

l) Mit welchen komplexen Zahlen a, b, c wird $\begin{pmatrix} 1 & 1+i & a \\ b & 2 & 3-i \\ 1-2i & c & 3 \end{pmatrix}$ eine Hermitesche Matrix?

m) Welche der folgenden Matrizen A_n sind symmetrisch, welche Hermitesch? Von welchen wissen Sie, daß $\mathbb{R}^4$ eine Basis aus Eigenvektoren von A_n hat?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} i & 2i & 3i & 4i \\ 2i & 3i & 4i & 5i \\ 3i & 4i & 5i & 6i \\ 4i & 5i & 6i & 7i \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ i & -1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 1 & -i \\ 1 & i & i & -1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} i & i & i & i \\ -i & i & -i & i \\ -i & i & i & i \\ -i & -i & -i & i \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$