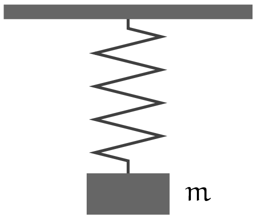
Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge zu den kleinen Übungen am 20. Dezember 2001



a) Eine senkrecht schwingende Masse m an einer Feder genügt der Differentialgleichung $m\ddot{x}(t) + \lambda x(t) = g$, wobei g die konstante Erdbeschleunigung ist. Lösen Sie diese Differentialgleichung und vergleichen Sie mit der Vorlesung, wo das entsprechende Problem für eine waagrecht schwingende Masse gelöst wurde!

b) Die stetig differenzierbare Funktion $y(t)$ erfülle die Gleichungen $\dot{y}(t)^2 = 1$ und $y(1) = 0$. Was können Sie über $y(t)$ sagen?

c) Bestimmen Sie den Lösungsraum des Differentialgleichungssystems

$$\dot{y}_1(t) = \lambda_1 y_1(t), \quad \dot{y}_2(t) = \lambda_2 y_2(t), \quad \ldots \quad \dot{y}_n(t) = \lambda_n y_n(t)\ !$$

d) Erraten Sie eine spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = 1 - x(t)$$

und geben Sie dann die allgemeine Lösung dieses Systems an!

e) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\dot{y}(t) + y \cdot \sin t = 0$!

f) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 18y(t) = 0$!

g) *Richtig oder falsch:* $e^A \cdot e^{(A^2)} = e^{(A^2)} \cdot e^A$.

h) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$, $e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$, $e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$!

i) Für eine $n \times n$-Matrix A sei $\sin A = \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA})$ und $\cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})$. Finden Sie eine Matrix $P \neq 0$, so daß für alle $n \times n$-Matrizen A und alle $r \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sin(A + rP) = \sin A \quad \text{und} \quad \cos(A + rP) = \cos A\,.$$

j) *Richtig oder falsch:* Die Eigenwerte der Matrix $2A$ sind doppelt so groß wie die von A.

k) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ 3 & -4 & -5 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$!

l) Was ist e^B ?

m) Was ist e^{Bt} ?

n) Bestimmen Sie die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 5x(t) - 6y(t) - 6z(t), \qquad & x(0) &= 0 \\ \dot{y}(t) &= 3x(t) - 4y(t) - 5z(t), \qquad & y(0) &= 0 \\ \dot{z}(t) &= -2x(t) + 4y(t) + 5z(z), \qquad & z(0) &= 7 \end{aligned}$$

o) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$!