Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge zu den kleinen Übungen am 13. Dezember 2001

a) Laut Vorlesung ist $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Konstruieren Sie mit Hilfe dieser Beziehung jene Stammfunktion $F(t)$ von $f(t) = t^n$, für die $F(0) = a$ ist!

b) Was ist $\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\}(s)$?

c) Berechnen Sie alle Laplace-Transformierten auf der Rückseite des neunten Übungsblatts, die Ihnen seltsam vorkommen!

d) Für welche $s \in \mathbb{C}$ existiert $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}\right\}(s)$?

e) Was ist die Laplace-Transformierte eines Rechteckimpulses?

f) Für eine reelle Zahl t ist bekanntlich $[t]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich t ist. Die Funktion f sei so definiert, daß $f(t) = 1$, falls $[t]$ gerade ist und null sonst. Veranschaulichen Sie sich die Funktion f und berechnen Sie $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$! Stellen Sie das Ergebnis nicht als unendliche Summe dar, sondern als geschlossenen Ausdruck!

g) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte von $x - [x]$!

h) Zeigen Sie: $\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$!

i) Was ist $\mathcal{L}\{t^2 f(t)\}(s)$?

j) Was ist $\mathcal{L}\{t^{1999}e^{-2000}\}(s)$?

k) Was ist $\mathcal{L}\{t^{1999}e^{-2000t}\}(s)$?

l) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0, \qquad x(0) = \sin a, \quad \dot{x}(t) = \cos a$$

via Laplace-Transformation und beweisen Sie so die Additionsformel für $\sin(x + a)$!

m) Wie kann man auf ähnliche Weise die Additionsformel für den Cosinus herleiten?

n) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \lambda y(t)$ und $y(0) = c$ mit Hilfe von Laplace-Transformationen!

o) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y^{(4)} - 16y(t) = 0$ mit $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 2$, $\ddot{y}(0) = 3$ und $y^{(3)}(0) = 0$ mit Hilfe einer Tabelle von Laplace-Transformationen!

p) Lösen Sie die Differentialgleichung $y^{(3)}(t) = y(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ und $\ddot{y}(0) = 0$!