Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge zu den kleinen Übungen am 22. November 2001

Falls Sie noch Probleme mit der Berechnung von Fourier*-Integralen haben, sind die entsprechenden Themenvorschläge für die letzte Übung wichtiger als die folgenden:*

a) Die Fourier-transformierbare Funktion f erfülle die Gleichung

$$\ddot{f}(t) + 4\dot{f}(t) - 3f(t) = g(t)$$

mit einer Fourier-transformierbaren Funktion g. Drücken Sie $\widehat{f}(\omega)$ durch $\widehat{g}(\omega)$ aus!

b) Laut Vorlesung ist die Fourier-Transformierte von $N_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$ für jedes $\sigma \in \mathbb{R}$ gleich der Funktion $g_\sigma(\omega) = e^{\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}}$. Berechnen Sie für alle $t, \omega \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{\sigma\to 0} N_\sigma(t)$ und $\lim\limits_{\sigma\to 0} g_\sigma(\omega)$!

c) Interpretieren Sie das vorige Ergebnis als Aussage über eine (im Funktionensinne nur hypothetische) Fourier-Transformation der Funktion $f(t) = 1$!

d) Welche Fourier-Transformation (im Distributionensinn) hat eine konstante Funktion?

e) *ditto* für $f(t) = \sin 3t$

f) Wie kann man $\sin(t) \cdot \delta(t)$ als Distribution defininieren und ausrechnen?

g) Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos(t)\big(\delta(t) + \delta(t-\pi) + \delta(t+\pi)\big)\,dt$?

h) Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(1+\frac{\pi i}{4}\right)t} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t+k)\,dt$?

i) Zeigen Sie: Ist $T\colon \mathcal{S}^*(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ eine Distribution und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine beschränkte stückweise stetige Funktion, so läßt sich eine Produktdistribution $f \cdot T\colon \mathcal{S}^*(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ definieren.

j) Zeigen Sie: Für dieses Produkt gilt

$$(f+g)\cdot T = f\cdot T + g\cdot T \quad \text{und} \quad f\cdot(S+T) = f\cdot S + f\cdot T\,.$$

k) *Richtig oder falsch:* $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}) \to \mathbb{C};\quad \varphi \mapsto \dot{\varphi}(0)$ ist eine Distribution.

l) *Richtig oder falsch:* $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}) \to \mathbb{C};\quad \varphi \mapsto \ddot{\varphi}(0) - 4\varphi(0)$ ist eine Distribution.