WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

25. März 2002

Nachklausur und 18. Übungsblatt Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Was ist $\int \cos^4 t\,dt$?

2) *Richtig oder falsch:* Die FOURIER-Reihe der Funktion $f(t) = \dfrac{1}{1+\tan^2 t}$ enthält keine Sinusterme.

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

4) Was ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) + 4y^{(3)}(t) + 6\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + y(t) = 0\,?$$

5) *Richtig oder falsch:* Falls die differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 1\right\}$$

ein Maximum hat, verschwindet dort der Gradient von f.

6) *Richtig oder falsch:* Die Zahlen (k^2, k^4) für $-10 \le k \le 10$ aus $\mathbb{Z}$ sind positiv korreliert.

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode 2π, und für $t \in [-\pi, \pi]$ sei $f(t) = \pi - |t|$.

a) Skizzieren Sie f über dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$!

b) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f ! Welche Symmetrien lassen sich dabei ausnutzen?

c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe gegen $f(t)$?

d) Tritt bei der Konvergenz das GIBBS-Phänomen auf?

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

a) Für eine gerade FOURIER-transformierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist

$$\widehat{f}(\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cos\omega t\,dt\,.$$

b) Bestimmen Sie die FOURIER-Transformierte von $f_a(t) = \begin{cases} |t| & \text{für } |t| \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ in Abhängigkeit von der reellen Zahl $a > 0$!

c) Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{a\to\infty} \widehat{f}_a(\omega)$, und falls ja: Welche Funktion ist das?

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 3: (*4 Punkte*)

Für $t \in \mathbb{R}$ sei $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ t+1 & \text{für } -1 \le t < 0 \\ t-1 & \text{für } 0 \le t \le 1 \end{cases}$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f!

b) Berechnen Sie die Ableitung von f im Distributionensinne!

c) Geben Sie diese Ableitung, gegebenenfalls unter Verwendung von $\delta(t)$, als „Funktion“ an! Ist diese „Funktion“ eindeutig bestimmt?

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y^{(3)}(t) + \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 51 \sin 2t, \qquad y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0 \quad !$$

b) Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$? War dieses Verhalten zu erwarten?

Aufgabe 5: (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren von A!

c) Berechnen Sie die Matrix e^{At}!

d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = -3x(t) + y(t) - z(t), \quad \dot{y}(t) = x(t) - 3y(t), \quad \dot{z}(t) = x(t) - y(t) - 2z(t)$$

mit $x(0) = y(0) = z(0) = 1$!

e) Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

f) Ist das Langzeitverhalten dieser Lösung stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Aufgabe 6: (*4 Punkte*)

a) Welche Gleichgewichtslösungen hat das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}(t) = x(t)^2 - y(t)^2, \qquad \dot{y}(t) = y(t)^2 - z(t)^2, \qquad \dot{z}(t) = y(t)^2 + z(t)^2 - 8\,?$$

b) Ist der Gleichgewichtspunkt im ersten Oktanten $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$ stabil?

Aufgabe 7: (*4 Punkte*)

Finden Sie den größten achsenparallelen Quader, der ganz im Ellipsoid

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 \le 1$$

enthalten ist!

Formelanhang

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{b \sin t - \cos t}{(b^2+1)(a^2-1)} + \frac{\cos at - \frac{b}{a} \sin at}{(a^2+b^2)(a^2-1)} + \frac{e^{-bt}}{(a^2+b^2)(b^2+1)} \right\}(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+a^2)(s+b)}$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Montag, dem 25. März 2002, um 13^{00} Uhr