Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

9. Februar 2002

Klausur und 16. Übungsblatt Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Zeigen Sie: $\cos^4 t - \sin^4 t = \cos 2t$

2) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der Funktion $f(t) = \cos|t|$!

3) *Richtig oder falsch:* Die Fourier-Reihe der Funktion $f(t) = \sin\bigl(\cos t\bigr)$ enthält keine Cosinusterme.

4) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{12\times 12}$ mit $a_{k\ell} = i^{k-\ell}$ ist diagonalisierbar.

5) Bestimmen Sie reelle Zahlen a, b, c, d derart, daß die Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) + ay^{(3)}(t) + b\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + dy(t) = 0$$

die allgemeine Lösung $y(t) = C_1 e^{-2t} + \bigl(C_2 + tC_3 + t^2 C_4\bigr)e^{-t}$ hat!

Aufgabe 1: (*8 Punkte*)
Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode 4π, und für $t \in [-2\pi, 2\pi]$ sei

$$f(t) = \begin{cases} 2\pi + t & \text{für } -2\pi < t \le -\pi \\ 2\pi & \text{für } \;-\pi < t \le \pi \\ 2\pi - t & \text{für } \;\;\pi < t \le 2\pi \end{cases}.$$

a) Skizzieren Sie f über dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$!

b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von f ! Welche Symmetrien lassen sich dabei ausnutzen?

c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe gegen $f(t)$?

d) Tritt bei der Konvergenz das Gibbs-Phänomen auf?

Aufgabe 2: (*4 Punkte*)

a) Für eine gerade Fourier-transformierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$.

b) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte von $f(t) = e^{-|t|}$!

Aufgabe 3: (*4 Punkte*)

a) Bestimmen Sie für die Funktion $f(t) = \begin{cases} 2\pi + t & \text{für } -2\pi < t \le -\pi \\ 2\pi & \text{für } \;-\pi < t \le \pi \\ 2\pi - t & \text{für } \;\;\pi < t \le 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die Ableitung im Distributionensinne!

b) Geben Sie diese Ableitung, gegebenenfalls unter Verwendung von $\delta(t)$, als „Funktion“ an! Ist diese „Funktion“ eindeutig bestimmt?

c) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte dieser Ableitung!

Aufgabe 4: (*4 Punkte*)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\ddot{y}(t) - y(t) = e^{-t}\cos t, \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0 \quad !$

b) Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$? War dieses Verhalten zu erwarten?

Aufgabe 5: (*12 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren von A!

c) Berechnen Sie die Matrix e^{At} !

d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{w}(t) = x(t) - w(t), \quad \dot{x}(t) = -x(t), \quad \dot{y}(t) = y(t) + z(t) - 2w(t), \quad \dot{z}(t) = z(t) - 2x(t)$$

mit $w(0) = x(0) = y(0) = z(0) = 1$!

e) Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

f) Ist das Langzeitverhalten dieser Lösung stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Aufgabe 6: (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungskurven $F(y,t) = C$ der Differentialgleichung

$$(4y(t)^3 + t^3)\dot{y}(t) + y(t)^4 + (t^3 + 3t^2)y(t) = 0\,!$$

b) Für welche $y_0 \in \mathbb{R}$ gibt es eine Konstante C, so daß $F(y,t) = C$ in einer Umgebung von $(y_0, 0)$ nach y aufgelöst werden kann?

Aufgabe 7: (*4 Punkte*)

a) Welche Gleichgewichtslösungen hat das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}(t) = x(t) - 2y(t)^2 + 12, \qquad \dot{y}(t) = x(t)^2 - 4y(t)^2\,?$$

b) Ist der Gleichgewichtspunkt im ersten Quadranten $(x > 0,\ y > 0)$ stabil?

Formelanhang

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at} - e^{-bt}\cos ct - \frac{a+b}{c}e^{-bt}\sin ct\right\}(s) = \frac{(a+b)^2 + c^2}{(s-a)\big((s+b)^2 + c^2\big)}$$

$$\int te^t\,dt = (t-1)e^t + C, \quad \int t^2e^t\,dt = (t^2-2t+2)e^t + C, \quad \int t^3e^t\,dt = (t^3-3t^2+6t-6)e^t + C$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Samstag, dem 9. Februar 2002, um 13^{00} Uhr