Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

4. Februar 2002

15. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Falls f in einem Punkt $\mathbf{x}$ des Würfels $-1 \leq x_i \leq 1$ für $i = 1, \ldots, n$ ein Maximum annimmt, ist dort $\operatorname{grad} f = \vec{0}$.
2) *Richtig oder falsch:* f sei auf $D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 2\}$ definiert und ∇f sei dort nirgends gleich dem Nullvektor. Dann nimmt f sowohl sein Maximum als auch sein Minimum in $M = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ auf der Einheitssphäre $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ an.
3) *Richtig oder falsch:* Falls die stetig differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to R$ nirgends ein Maximum hat, ist sie unbeschränkt.
4) Konstruieren Sie eine mindestens zweifach differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die keine der beiden partiellen Ableitungen überall verschwindet, aber $\nabla f(0,0) = \vec{0}$ ist, ohne daß der Nullpunkt Maximum, Minimum oder Sattelpunkt wäre!
5) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist positiv definit.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*
Bestimmen Sie alle (lokalen) Maxima und Minima sowie die Sattelpunkte der Funktion $f(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$ in $\mathbb{R}^2$!

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*

a) Ein Produkt werde aus drei Resourcen hergestellt, die jeweils 80 DM, 12 DM *bzw.* 10 DM pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können für 24 000 DM maximal gefertigt werden?
b) Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von 24 000 DM zu erhöhen?

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

a) Beschreiben Sie die Menge

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$$

geometrisch!
b) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$ in M!

Keine Abgabe! Abgegeben wird diese Woche nur die Klausur!