WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

14. Januar 2002

12. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Falls es zum Eigenwert λ einen Hauptvektor r-ter Stufe gibt, hat λ mindestens die algebraische Vielfachheit r.

2) Richtig oder falsch: Zu jedem Eigenwert der algebraischen Vielfachheit r gibt es einen Hauptvektor r-ter Stufe.

3) Die komplexe $n \times n$-Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ mit den algebraischen Vielfachheiten $r_1, \dots, r_s$. Was ist $\det A$?

Aufgabe 1: (*8 Punkte*)

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Hauptvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$!

b) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ an, bezüglich derer A Dreiecksgestalt hat, und berechnen Sie die hundertste Potenz dieser Dreiecksmatrix!

c) Was ist e^{At}?

d) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y(t) + z(t), & x(0) &= 1 \\ \dot{y}(t) &= 2x(t) - 4y(t) - 2z(t), & y(0) &= 2 \\ \dot{z}(t) &= 3x(t) - 5y(t) + 2z(t), & z(0) &= 3 \ ! \end{aligned}$$

e) Was können Sie über das Langzeitverhalten dieser Lösung sagen?

Aufgabe 2: (*4 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung $\big(x(t), y(t)\big)$ des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -5x(t) - 8y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = 2x(t) + 3y(t)\,!$$

b) Welche dieser Lösungen bleiben für $t \to \infty$ beschränkt?

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die sämtlichen Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) + 2y^{(3)}(t) - 2\dot{y}(t) - y(t) = 4 \sin t\,!$$

b) Welche Möglichkeiten gibt es für das Langzeitverhalten einer Lösungsfunktion?

Abgabe bis zum Montag, dem 21. Januar 2002, um 15.30 Uhr