Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

7. Januar 2002

11. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Welche Nullstellen hat das Polynom $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$?

2) ...und $x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4$?

3) *Richtig oder falsch:* Ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und führendem Koeffizienten eins hat ganzzahlige Nullstellen.

4) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ ist Hermitesch.

5) *Richtig oder falsch:* Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist ${}^t\!A\overline{A}$ Hermitesch.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$!

b) Was sind e^A und e^{At}?

c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = -x(t) - 2y(t), \quad \dot{y}(t) = -2x(t) - y(t), \qquad x(0) = y(0) = 1\,!$$

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die komplexen Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$!

b) Bezüglich welcher Basis von $\mathbb{C}^2$ hat A welche Diagonalgestalt?

c) Auf $V = [1, t, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t] \le \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei die lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ definiert durch $\varphi(f) = \frac{d^2 f}{dt^2}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von φ!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

Ein starrer Körper bewege sich mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um seinen Massenmittelpunkt; der Drehimpuls ist dann bekanntlich gleich $J \cdot \vec{\omega}$ mit $J =$ Trägheitstensor.

a) Zeigen Sie unter der (physikalisch sinnvollen) Annahme, daß die 3×3-Matrix J drei positive reelle Eigenwerte hat, daß der Drehimpuls bei (betragsmäßig) konstanter Winkelgeschwindigkeit genau dann maximalen *bzw.* minimalen Betrag hat, wenn ω ein Eigenvektor zum größten *bzw.* kleinsten Eigenwert von J ist.

b) Man kann zeigen, daß das von $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelepiped mit Massendichte $\rho = 1/16$ den Trägheitstensor $J = \begin{pmatrix} 40 & -2 & 0 \\ -2 & 37 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$ hat. Bestimmen Sie die Achsen des maximalen und des minimalen Drehimpulses!

Abgabe bis zum Montag, dem 14. Januar 2002, um 15.30 Uhr