Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

17. Dezember 2001

10. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = y(t)$ hat nur die Exponentialfunktion als Lösung.
2) Finden Sie eine $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so daß $e^A = -E$ die negative Einheitsmatrix ist!
3) *Richtig oder falsch:* Für eine $n \times n$-Matrix A gilt: $\det e^A = e^{\det A}$.
4) *Richtig oder falsch:* (A_i) sei eine konvergente Folge von $n\times n$-Matrizen. Dann konvergiert auch die Folge der Matrizen e^{A_i}.
5) *Richtig oder falsch:* Jede reelle 3×3-Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert.
6) *Richtig oder falsch:* Ein Eigenvektor $\vec{v}$ der Matrix A zum Eigenwert λ ist Eigenvektor von e^A zum Eigenwert e^λ.

Aufgabe 1: (*4 Punkte)*
a) Beim radioaktiven Zerfall gemäß $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$ bezeichnet man den Zeitpunkt $t_{1/2}$, in dem $m(t_{1/2}) = m_0/2$ ist, als *Halbwertszeit.* Für das Cäsium 137, das am 26. April 1986 bei der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl freigesetzt wurde, ist $t_{1/2} = 30{,}14$ Jahre. Wieviel Prozent des Cäsiums 137 sind bis zum 26. Dezember 2002 zerfallen?
b) Die C^{14}-Methode zur radioaktiven Datierung beruht darauf, daß das stabile Kohlenstoffisotop C^{12} und das radioaktive C^{14} in lebenden Organismen in einem festen Massenverhältnis stehen; nach dem Tod des Organismus zerfällt das vorhandene C^{14} mit einer Halbwertszeit von 5763 Jahren, ohne daß neues nachkommt. Bei einer Holzprobe aus den Höhlen von Lascoux maß man 0,97 Zerfälle pro Gramm und Minute; für lebendiges Holz wären 6,68 Zerfälle normal. Wie alt ist die Probe?

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*
a) Zeigen Sie: Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist $A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}\cdot n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
b) Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}$ die Matrix e^{At} !
c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{x}(t) = -x(t)+y(t)$ und $\dot{y}(t) = -y(t)$ sowie die spezielle Lösung mit $x(0) = 1$ und $y(0) = -1$!

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*
a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 16 & 0 & -8 \\ -28 & 15 & 14 \\ 16 & 0 & -8 \end{pmatrix}$!
b) Was ist e^A ?
c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 16x(t) - 8z(t), & x(0) &= 1 \\ \dot{y}(t) &= -28x(t) + 15y(t) + 14z(t), & y(0) &= 0 \\ \dot{z}(t) &= 16x(t) - 8z(t), & z(0) &= 2 \end{aligned}$$

FROHE WEIHNACHTEN

und

VIEL ERFOLG BEI DEN KLAUSUREN IM NEUEN JAHR!

Abgabe bis zum Montag, dem 7. Januar 2002, um 15.30 Uhr