Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

10. Dezember 2001

9. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Was ist $\mathcal{L}\{\sin(at+b)\}(s)$?

2) Was ist $\mathcal{L}\{\delta(t-1)\}(s)$?

3) *Richtig oder falsch:* Falls die Fourier-Transformierte einer Funktion f existiert, existiert auch ihre Laplace-Transformierte.

4) *Richtig oder falsch:* Falls es reelle Zahlen c, M gibt, so daß $|f(t)| < Me^{ct}$ ist für alle $t \geq 0$, existierts $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathfrak{Re}\, s > c$.

5) *Richtig oder falsch:* Für $f(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$ existiert $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 1: (*10 Punkte*)
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit Hilfe einer Tabelle von Laplace-Transformationen (z.B. Bronstein/Semendjajew, 4.4.3, oder Rückseite des Übungsblatts):

a) $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 4x(t) = te^{-3t}$, $\quad x(0) = 0$, $\quad \dot{x}(0) = 0$

b) $\ddot{x}(t) - 9x(t) = \cos 3t$, $\quad x(0) = 0$, $\quad \dot{x}(0) = 0$

c) $\ddot{x}(t) + 9x(t) = \cosh 3t$, $\quad x(0) = 0$, $\quad \dot{x}(0) = 0$

d) $\dot{x}(t) + 5x(t) = \sin 3t$, $\quad x(0) = 0$

e) $\ddot{x}(t) + x(t) = \sin t$, $\quad x(0) = 0$, $\quad \dot{x}(0) = 0$

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode T. Dann ist $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T f(t)e^{-st}\, dt$.

b) Berechnen Sie $\int_0^T (1-\cos\omega t)e^{-st}\, dt$ für $T = 2\pi/\omega$ aus der (bekannten) Laplace-Transformierten von $1 - \cos\omega t$!

c) Betrachten Sie nun die Funktion mit Periode $2T$, für die gilt

$$f(t) = \begin{cases} 1-\cos\omega t & \text{falls } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{falls } T \leq t \leq 2T \end{cases},$$

und berechnen Sie deren Laplace-Transformierte!

d) $f(t)$ sei der Rechteckimpuls mit Periode 2π, der zwischen 0 und π gleich einer Konstanten c ist und gleich null für den Rest der Periode. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\ddot{x}(t) + 4x(t) = f(t) \quad \text{mit} \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0\,.$$

Abgabe bis zum Montag, dem 17. Dezember 2001, um 15.30 Uhr

Einige Laplace-Transformierte

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
$e^{\lambda t}$	$\dfrac{1}{s-\lambda}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\sinh \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$
$e^{-\lambda t} - \cos \omega t + \dfrac{\lambda}{\omega} \sin \omega t$	$\dfrac{\lambda^2+\omega^2}{(s^2+\omega^2)(s+\lambda)}$
$e^{\lambda t} - 2e^{-\lambda t/2} \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda t + \dfrac{\pi}{6}\right)$	$\dfrac{3\lambda^2}{s^3-\lambda^3}$
$\sinh \omega t - \sin \omega t$	$\dfrac{2\omega^3}{s^4-\omega^4}$
$\cosh \omega t - \cos \omega t$	$\dfrac{2\omega^2 s}{s^4-\omega^4}$
$\sinh \omega t + \sin \omega t$	$\dfrac{2\omega s^2}{s^4-\omega^4}$
$\cosh \omega t + \cos \omega t$	$\dfrac{2s^3}{s^4-\omega^4}$
$\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\dfrac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t \sin \omega t$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\sin \omega t + \omega t \cos \omega t$	$\dfrac{2\omega s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$2 \cos \omega t - \omega t \sin \omega t$	$\dfrac{2s^3}{(s^2+\omega^2)^2}$