Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

12. November 2001

5. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Potenzen x^n mit $n \in \mathbb{N}_0$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem für den Vektorraum aller Potenzreihen in x.

2) Richtig oder falsch: Die Funktion $e^{-t}\cos t$ ist stark abfallend.

3) Richtig oder falsch: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 1$ für $|t| \le 1$ und $f(t) = 0$ sonst ist stark abfallend.

4) Richtig oder falsch: Jede stark abfallende Funktion hat zumindest eine stark abfallende Stammfunktion.

5) Richtig oder falsch: Das Produkt zweier stark abfallender Funktionen ist stark abfallend.

6) Richtig oder falsch: Falls die Fourier-Transformierte $\widehat{f}(\omega)$ einer stetigen periodischen Funktion f existiert, ist $f(t) \equiv 0$.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für ein trigonometrisches Polynom f der Periode T und eine beliebige Funktion $g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $f * g$ ein trigonometrisches Polynom.

b) Geben Sie explizit eine Funktion f_N an, so daß für jede Funktion $g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gilt

$$f_N * g = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t},$$

wobei c_k den k-ten Fourier-Koeffizienten von g bezeichnet!

c) Was hat das mit der aus der Vorlesung bekannten Funktion I_r zu tun?

Aufgabe 2: (*4 Punkte)*

Für eine periodische Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit Fourier-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\omega t}$ wird $\kappa = \sum_{|k|>1} |c_k|^2 \Big/ \sum_{|k|>0} |c_k|^2$ als *Klirrfaktor* bezeichnet. Berechnen Sie κ

a) für eine periodischen Rechteckschwingung

b) für eine Sägezahnschwingung,
jeweils für die aus der Vorlesung bekannte Standardform!

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

Berechnen Sie die Fourier-Transformierten von

a) $f(t) = \begin{cases} 4 - t^2 & \text{für } |t| < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b) $g(t) = \begin{cases} \cos t & \text{für } |t| < 10\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Abgabe bis zum Montag, dem 19. November 2001, um 15.30 Uhr