Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515

A5, C201

*29. Oktober 2001*

# 3. Übungsblatt Höhere Mathematik II

**Fragen:** *(je ein Punkt)*
*Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine* kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

*1)* *Richtig oder falsch:* Falls zwei stückweise stetige Funktionen mit Periode $T$ dieselbe FOURIER-Reihe haben, sind sie gleich.
*2)* *Richtig oder falsch:* Falls in der FOURIER-Reihe einer stetigen Funktion $f$ keine Cosinusterme auftreten, ist $f$ ungerade.
*3)* *Richtig oder falsch:* Falls keine Sinusterme auftreten, ist $f$ gerade.
*4)* Was ist die zweite Ableitung der Funktion $f(t) = \mathrm{Si}(t)$?
*5)* Berechnen Sie die TAYLOR-Reihe von $f(t) = \mathrm{Si}(t)$!

**Aufgabe 1:** (*8 Punkte*)
Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei für $c \le t < c + T$ definiert durch $g(t) = p + \frac{t-c}{T} \cdot (q-p)$ mit $c, p, q \in \mathbb{R}$ und $T > 0$; sie werde periodisch fortgesetzt auf ganz $\mathbb{R}$ mit Periode $T$.

*a)* Skizzieren Sie die Funktion $g$! Für welche Parameterwerte ist sie gerade *bzw.* ungerade?
*b)* Berechnen Sie die FOURIER-Reihe $S_g$ von $g$.
*c)* Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $S_g(t) = g(t)$ und welchen Wert hat $S_g(t)$ sonst?
*d)* Wo gibt es Überschwingungen (GIBBS-Phänomen), und welchen Absolutbetrag haben sie?
*Hinweis:* Wenn Sie mit den aus der Vorlesung bekannten Reihen vergleichen, können Sie diese Aufgabe auch lösen, ohne ein einziges Integral zu berechnen. Sie sollten allerdings die Additionsformel $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ kennen.

**Aufgabe 2:** (*4 Punkte*)
Folgern Sie aus den Orthogonalitätsrelationen für trigonometrische Funktione, daß für ein trigonometrisches Polynom $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{N} b_\ell \sin \ell\omega t$ gilt

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \quad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt \quad \text{und} \quad b_\ell = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin \ell\omega t\,dt \quad \text{mit} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}\,!$$

**Aufgabe 3:** (*3 Punkte*)
Zeigen Sie: Für $f(t) = \sum_{k=-N}^{N} b_k e^{i\cdot k\omega t}$ und $g(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{i\cdot k\omega t}$ ist das Produkt ein trigonometrisches Polynom der Form $f(t)g(t) = \sum_{k=-(N+M)}^{N+M} d_k e^{i\cdot k\omega t}$ mit $d_k = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} b_\ell c_{k-\ell}$!
(Alle nicht vorkommenden Koeffizienten werden als Null angenommen.)

**Abgabe** bis zum Montag, dem 5. November 2001, um 15.30 Uhr