Kapitel 1
Darstellung dreidimensionaler Objekte

Im Gegensatz zur klassischen technischen Zeichnung ist ein geometrisches Modell von vornherein dreidimensional; zweidimensionale Zeichnungen (eventuell auch mit variabler Perspektive) sind nur *eine* seiner vielfältigen Darstellungsmöglichkeiten. Je nach Anwendungsgebiet sind Datenstrukturen, die für die numerische Simulation von Eigenschaften des fertigen Objekts benötigt werden, oder Daten, die eine Werkzeugmaschine steuern können, mindestens genauso wichtig.

Es wäre natürlich völlig hoffnungslos, wollte man versuchen, *beliebige* Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ durch endliche Datenstrukturen zu beschreiben. Zum Glück *interessieren* völlig beliebige Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ aber auch nicht sonderlich, denn nur wenige, vom Standpunkt der Mengenlehre aus sehr spezielle, Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ entsprechen physikalischen Objekte oder auch nur Objekten, die wir uns bildlich vorstellen können.

Aufgabe der geometrischen Modellierung kann es daher nur sein, die für eine spezifische Anwendung oder – besser – für möglichst viele Anwendungen relevanten Teilmengen darzustellen. Dazu gibt es im wesentlichen zwei Gruppen von Ansätzen, die durchaus auch gelegentlich vermischt werden:

- CSG-Darstellung
- B-Rep-Darstellung

§1: CSG-Darstellung eines dreidimensionalen Objekts

CSG steht für *computational solid geometry,* wobei *solid geometry* das englische Wort für *dreidimensionale Geometrie* oder *Stereometrie* ist.

Der wesentliche Punkt der CSG-Darstellung ist die Synthese komplexer dreidimensionaler Objekte oder Szenen aus (im allgemeinen) wenigen *primitiven* Objekten mittels einiger weniger Verknüpfungsregeln. Die notwendige Flexibilität wird dadurch erreicht, daß sowohl die primitiven Objekte als auch die Verknüpfungsregeln im allgemeinen von Parametern abhängen.

a) Primitive Objekte

Die „primitiven Objekte“ können je nach Ansatz von völlig verschiedener Natur sein. Über ihre exakte Implementierung wollen wir uns im Augenblick noch keine Gedanken machen; damit werden wir in den folgenden Kapiteln noch genug zu tun haben. Hier sollen nur einige populäre Wahlen für solche Objekte aufgeführt werden.

1) Solid modeling: Das Wort *solid* in diesem Zusammenhang ein Substantiv mit der deutschen Übersetzung „(geometrischer) Körper“. Bei dieser ältesten Variante der geometrischen Modellierung, die an die klassische Darstellende Geometrie anknüpft, sind die primitiven Objekte einfache Objekte der Elementargeometrie wie Quader, Dreiecksprismen, Zylinder, Kegel sowie (manchmal) Kugeln und Tori. Ihre geometrische Gestalt wird durch Parameter festgelegt; ihre Lage und Orientierung im Raum ist zunächst in einer festen Standardposition.

So könnte beispielsweise das geometrische Objekt

$$\texttt{Quader}(a, b, c)$$

ein achsenparalleler Quader sein, der in x-Richtung die Kantenlänge a hat, in y- und z-Richtung entsprechend b und c. Seine Lage kann beispielsweise dadurch festgelegt sein, daß die linke hintere untere Ecke gleich dem Nullpunkt ist.

Entsprechend können wir ein Objekt

$$\texttt{Zylinder}(r, h)$$

definieren, das einen Zylinder mit Höhe h und Radius r beschreibt, dessen Achse die y-Achse zwischen $y = 0$ und $y = h$ ist.

Aufgrund der Einfachheit der primitiven Objekte lassen sich sowohl diese selbst aus auch die daraus zusammengesetzten Objekte relativ einfach manipulieren; auch photorealistische Darstellungen sind vergleichsweise einfach.

2) Kinematische Erzeugung: Bei dieser Methode wird ein primitives Objekt dadurch definiert, daß eine Fläche wie beispielsweise eine Kreisscheibe entlang einer Raumkurve geführt wird; das Objekt besteht aus allen Punkten, die dabei überstrichen werden.

Um diese Definition eindeutig zu machen, muß natürlich der Punkt auf der Fläche festgelegt werden, der sich wirklich auf der Kurve bewegt. Außerdem braucht man einen von diesem Punkt ausgehenden Vektor, der die Orientierung der Fläche im Raum festlegt, beispielsweise so, daß er stets parallel zum Tangentenvektor der Raumkurve sein soll.

Als Beispiel betrachten wir eine Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt als ausgezeichnetem Punkt; der Vektor dort sei ein Normalenvektor, stehe also senkrecht auf der Kreisscheibe. Bewegt sich diese Fläche nun entlang einer Strecke, so entsteht ein Zylinder; bewegt sie sich entlang eines Kreises mit hinreichend großem Radius, entsteht ein Torus.

Bei komplizierten Flächen und Raumkurven kann es recht aufwendig sein, beispielsweise für Beleuchtungseffekte, die Randfläche des so definierten Körpers zu bestimmen; wenn es in erster Linie um photorealistische Graphik geht, ist diese Art von primitiven Objekten also nicht zu empfehlen. Andererseits lassen sich Objekte, die auf einer numerisch gesteuerten Werkzeugmaschine mit Bohrern, Fräsen und ähnlichem hergestellt werden sollen, hervorragend auf diese Weise modellieren, und die geometrische Beschreibung des Objekts kann leicht in Steuerdaten für die Werkzeugmaschine übersetzt werden.

3) Algebraische Halbraumdarstellung: Hier sind die primitiven Objekte algebraische Halbräume, d.h. Mengen der Form

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(x,y,z)\le 0\right\},$$

wobei f ein irreduzibles Polynom in x, y und z ist[*)] .

Für das Polynom

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$$

etwa erhalten wir eine Kugel, für

$$g(x,y,z)=x$$

den gesamten Halbraum, in dem die x-Koordinate nicht positiv ist. Insbesondere gibt es also bei diesem Ansatz also auch primitive Objekte, die nicht endlich sind; sie sind nützlich zum Schneiden mit anderen Objekten. Beispielsweise ist der Durchschnitt der beiden gerade definierten algebraischen Halbräume eine Halbkugel.

Wie wir im letzten Kapitel sehen werden, kann das Arbeiten mit Polynomen hohen Grades recht aufwendig sein; deshalb erlauben Systeme, die mit algebraischen Halbräumen arbeiten gelegentlich nur Polynome vom Grad höchstens drei oder gar nur zwei. Dadurch vereinfachen sich die Algorithmen beträchtlich, allerdings verliert man auch Flexibilität und muß dies eventuell durch eine erheblich größere Anzahl von Halbräumen zur Darstellung eines gewünschten Obkjekts erkaufen.

4) Normteile: Zumindest aus Sicht des Anwenders kann man auch deutlich kompliziertere Objekte als *primitiv* betrachten: Im Maschinenbau etwa gibt es eine Vielzahl von Teilen, die immer wieder verwendet werden: Das sind einmal Normteile wie Schrauben, Nieten, Scheiben, Bolzen, Wälzlager, . . . , die in einer Vielzahl von DIN-Normen, europäischen Normen und ISO-Normen beschrieben sind[*)] , dann aber auch Katalogteile von Zulieferfirmen und mehrfach verwendbare Eigenentwicklungen.

Von der Implementierung her sind Norm- und Katalogteile natürlich alles andere als primitive Objekte; sie sind nach irgendeinem der hier oder

---

[*)] Ein Polynom heißt irreduzibel, wenn es nicht als Produkt zweier nichtkonstanter Faktoren geschrieben werden kann.

[*)] Allein die CAD-Normteildatei des DIN enthält rund 1000 Normen im nächsten Paragraphen behandelten Prinzipien konstruiert. Allerdings sind sie oft unabhängig vom Rest des Systems implementiert und mit diesem nur über eine Schnittstelle verbunden:

Auf Initiative der Anwendert gründete hier das Deutsche Institut für Normung (DIN) zusammen mit dem Verband der Automobilindustrie (VDA), dem Verband Deutscher Maschinen und Anlagenbau (VDMA) und dem Zentralverband der Elektrotechnik und Elektronikindustrie (ZVEI) im April 1988 die DIN Software GmbH, die nicht nur Dateien mit CAD-Normteiltabellen (nach DIN V 4001), sondern auch Programme mit genormter Schnittstelle (DIN V 66304) für CAD-Systeme vertreibt.

Bei den Anbietern von CAD-Systemen stieß dies naturgemäß auf sehr geringe Begeisterung; trotzdem gibt es zumindest im (aus Sicht der geometrischen Modellierung steinzeitlichen) zweidimensionalen CAD praktisch kein marktrelevantes CAD-System mehr, das seine eigenen Normteile anbietet. Stattdessen ist ein Modul zur Realisierung der Schnittstelle nach DIN V 66304 integriert, über den die CAD-Geometrieprogramme der DIN Software AG sowie auch die für Zuliefer- und Werksteile unabhängig vom CAD-System integriert werden können. Für den Endanwender, den Konstrukteur also, sind diese Teile primitive Objekte, deren innerer Aufbau ihm nicht bekannt sein muß und möglicherweise auch nur wenig mit der Designphilosophie seines eigenen CAD-Systems zu tun hat.

b) Geometrische Manipulation primitiver Objekte

Die bislang definierten primitiven Objekte haben eine feste Position und Orientierung im Raum; bevor sie für eine geometrische Konstruktion verwendet werden können, müssen sie also noch in die richtige Position gebracht werden. Dies geschieht durch Verschiebungen und Drehungen, durch die klassischen Bewegungen der EUKLIDischen Geometrie also, und ist somit relativ unproblematisch. Wir werden uns erst im dritten Kapitel genauer mit diesem Thema beschäftigens; dort wollen wir gleichzeitig auch noch andere Transformationen in der Graphikpipeline betrachten.

c) Regularisierte Boolesche Operationen

Um primitive Objekte zu einer interessanten Konstruktion oder Szene zusammenzustellen, brauchen wir Regeln, mit denen diese miteinander kombiniert werden können. Das sind im wesentlichen die üblichen mengentheoretischen Operationen, allerdings nicht ganz:

Im Rahmen der geometrischen Modellierung wäre es unsinnig, zwischen der offenen Kugel

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 < 1\right\}$$

und der geschlossenen Kugel

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

zu unterscheiden: Ein Unterschied zwischen den beiden Mengen läßt sich weder visuell erkennen noch physikalisch konstruieren. Da der Rand eines Objekts für die graphische Darstellung sehr wichtig ist, wollen wir vereinbaren, daß wir grundsätzlich nur abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ betrachten.

Außerdem interessieren in der geometrischen Modellierung nur *dreidimensionale* Objekte; das zweidimensionale Quadrat

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |x| \leq 1, |y| \leq 1, z = 0\right\}$$

ist also kein Objekt einer sinnvollen geometrischen Modellierung: Solche Mengen werden erst interessant, wenn wir aus dem dreidimensionalen geometrischen Modell zweidimensionale Ansichten erzeugen.

Wir erstetzen daher die üblichen mengentheoretischen Operationen durch sogenannte *regularisierte* Versionen

$$A \cup^* B \underset{\text{def}}{=} \overline{A^\circ \cup B^\circ}, \quad A \cap^* B \underset{\text{def}}{=} \overline{A^\circ \cup B^\circ}, \quad \text{und} \quad A \setminus^* B \underset{\text{def}}{=} \overline{A^\circ \setminus \overline{B}}\,.$$

Dabei steht M° wie üblich für das Innere einer Menge und $\overline{M}$ für den Abschluß. Da wir zur geometrischen Modellierung nur abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ betrachten, ist die Bildung des Abschlusses von B vor der Berechnung der Differenz nicht wirklich notwendig; sie ist nur erwähnt um auch typographisch klarzumachen, daß wir zunächst nur die inneren Punkte des Resultats berechnen.

Geometrisch betrachtet bedeuten diese Definitionen, daß wir Randpunkte zunächst außer acht lassen, wenn wir die Mengen vereinigen, schneiden oder ihre Differenz bilden; danach berechnen wir zusammen mit dem Abschluß auch den neuen Rand für die entstehende Mengen.

Der Unterschied zu den klassischen Operationen wird am besten anhand einiger Beispiele klar:

Seien A und B zwei Quader, die sich nur am Rand berühren. Dann haben A und B keine inneren Punkte gemeinsam, $A^\circ \cap B^\circ$ ist also die leere Menge, und damit ist auch $A \cap^* B = \emptyset$.

Die reguläre Vereinigung unterscheidet sich nicht von der gewöhnlichen; in beiden Fällen werden (fast alle) gemeinsame Randpunkte zu inneren Punkten, genauso wie man es für die meisten Anwendungen auch haben möchte: Ein L-förmiges Werkstück, das für die geometrische Modellierung aus zwei Quadern zusammengesetzt wird, sollte die (von der Geometrie des Werkstücks her nicht eindeutig definierte) Grenzfläche der beiden Quadern nicht als ausgezeichnete Fläche enthalten, schon gar nicht, wenn wir die (Rand-)Flächen für die Berechnung von Beleuchtungseffekten verwenden.

Es gibt allerdings auch Fälle, in denen gemeinsame Randpunkte nicht verschwinden sollten: Falls ein konstruiertes Objekt anschließend für Simulationen von Eigenschaften wie Elastizität, Bruchfestigkeit oder Umströmungsverhalten weiterverarbeitet werden soll, ist es sehr nützlich, ein in Zellen unterteiltes Objekt zu haben, denn das übliche Verfahren zur numerischen Integration partieller Differentialgleichungen, die Methode der finiten Elemente, arbeitet mit solchen Zerlegungen, und für krummlinig begrenzte Objekte kann es recht schwierig sein, eine solche Zerlegung zu finden. Man sollte daher in solchen Fällen die „verschwindenden“ Randflächen nicht vergessen, sondern nur notieren, welche Flächen zum Rand der entstehenden Gesamtfigur gehören und welche nicht. Dazu können auch weitere Unterteilungen notwendig sein, etwa wenn sich zwei Quader nur in Teilen einer Randfläche schneiden wie bei einem aus zwei Quadern zusammengesetzten L- oder T-Stück.

Regularisierte Differenzen sind vor allem dann interessant, wenn die zweite Menge eine Teilmenge der ersten ist; ist $B \subset A$ etwa ein Zylinder

im Quader A, so ist $A \setminus^* B$ das Resultat einer Bohrung.

d) Der CSG-Baum eines Objekts

Ein geometrisches Objekt in CSG-Darstellung wird üblicherweise dargestellt durch einen Baum. Die Wurzel dieses Baumes repräsentiert das Objekt selbst, die Blätter sind die primitiven Objekte, aus denen es zusammengesetzt ist.

Die restlichen Knoten stehen entweder für geometrische Transformationen oder für regularisierte BOOLEsche Operationen. Im ersten Fall geht vom entsprechenden Knoten genau eine Kante aus, an der ein Baum hängt, der das Objekt beschreibt, auf das die Transformation angewandt wird. Im zweiten Fall gibt es zwei Kanten, an denen Bäume für die beiden Objekte hängen, auf die die BOOLEsche Operation angewandt wird. (Es ist Geschmacksache, ob man bei der regularisierten Vereinigung und beim regularisierten Durchschnitt, die ja beide kommutativ und assoziativ sind, eventuell auch mehrere Operanden zulassen will.)

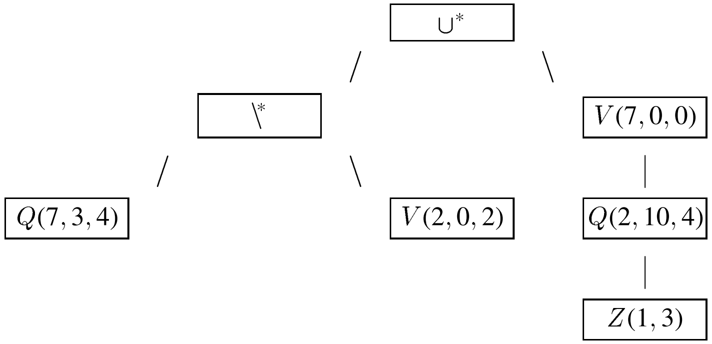
Als Beispiel betrachten wir ein L-Stück, dessen lange Seite eine zylindrische Bohrung aufweise. Das L läßt sich auf zwei verschiedene Weisen als Vereinigung zweier Quader definieren; wir nehmen etwa an, der erste habe als linke untere hintere Ecke den Punkt $(0, 0, 0)$ und als rechte obere vordere Ecke den Punkt $(7, 3, 4)$. Wenn wir beide Quader als achsenparallel voraussetzen, ist der erste Quader dadurch eindeutig festgelegt. Beim zweiten Quader sei die linke untere hintere Ecke $(7, 0, 0)$ und die rechte obere vordere sei $(9, 10, 4)$. Die zylindrische Bohrung sei ein Zylinder, dessen Mittellinie vom Punkt $(2, 0, 2)$ zum Punkt $(2, 3, 2)$ gehe und der den Radius eins habe.

Der erste Quader liegt dann bereits so, wie wir es oben in §1*a)* für primitive Quader vorausgesetzt haben; in der dort eingeführten Terminologie ist er also das primitive Objekt `Quader`$(7, 3, 4)$.

Der zweite Quader hat keine Ecke im Nullpunkt, ist aber immerhin noch achsenparallel. Er kann daher ohne Drehung nur durch Verschiebung aus einem primitiven Quader erzeugt werden, wobei allerdings auch das auf verschiedene Weise geschehen kann. Am einfachsten ist es wohl, ihn durch Verschiebung um den Vektor $(7,0,0)$ aus $\texttt{Quader}(2,10,4)$ zu erzeugen.

Bleibt noch der Zylinder. Er hat Höhe drei und Radius eins, ist also kongruent zu $\texttt{Zylinder}(1,3)$. Dieser Zylinder hat als Mittelachse den Teil der y-Achse zwischen dem Nullpunkt und $(0,3,0)$; um daraus den gewünschten Zylinder zu erhalten, können wir uns also wieder mit einer Verschiebung begnügen, diesmal um den Vektor $(2,0,2)$.

Der CSG-Baum ist auch mit diesen Festlegungen noch nicht eindeutig bestimmt: Dazu müssen wir noch festlegen, ob wir zuerst bohren wollen oder zuerst die beiden Quader zusammensetzen. Falls wir zuerst bohren ergibt sich der Baum



in dem $\texttt{Quader}(a,b,c)$ der Einfachheit halber durch $Q(a,b,c)$ abgekürzt ist und $\texttt{Zylinder}(r,h)$ durch $Z(r,h)$; entsprechend steht $V(x,y,z)$ für die Verschiebung um den Vektor (x,y,z).

§2: Manipulation von CSG-Bäumen

Wie schon das sehr einfache Beispiel aus dem letzten Abschnitt zeigt, ist der CSG-Baum eines geometrischen Objekts alles andere als eindeutig. Dies hat den Vorteil, daß geometrische Operationen und regularisierte BOOLEsche Operationen für Objekte, die durch CSG-Bäume definiert sind, sehr einfach ausführbar sind: Man erzeugt einfach eine neue Baumwurzel und hängt das oder die Argumente der Operation an.

Dies kann im Einzelfall zu sehr ineffizienten Darstellungen führen, etwa wenn dasselbe Objekt mehrfach als Blatt vorkommt oder wenn ein Objekt und eine echte Teilmenge davon Blätter desselben CSG-Baums sind. Mit graphentheoretischen Algorithmen, wie sie etwa aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen* bekannt sind, läßt sich dieses Problem teilweise abmildern; jedoch möchte ich im Rahmen dieser Vorlesung nicht näher darauf eingehen, da wir bei den meisten im Laufe dieses Semesters behandelten Ansätzen ohnehin den CSG-Baum in eine andere Datenstruktur übersetzen werden, die einen Teil der Unbestimmtheiten eliminiert.

Zumindest anhand einiger weniger Beispiele sollten wir uns aber doch einen Eindruck vom Umgang mit CSG-Bäumen verschaffen. Eine wichtige Aufgabe in der geometrischen Modellierung ist beispielsweise

a) Die Klassifikation eines Punktes bezüglich eines CSG-Objekts

Damit ist folgendes gemeint: Gegeben sei ein Punkt $P = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Für die Lage dieses Punkts bezüglich eines durch einen CSG-Baum definierten Objekts sind für uns drei Fälle interessant: P kann innerer Punkt sein, er kann auf dem Rand liegen oder außerhalb. Die Entscheidung darüber, welcher dieser drei Fälle vorliegt, bezeichnet man als *Klassifikation* des Punkts bezüglich des CSG-Objekts.

Mit unseren bisherigen Kenntnissen können wir nicht unbedingt unterscheiden, welcher der drei Fälle vorliegt: Zumindest bei einigen der Beispiele für primitive geoometrische Objekte ist es alles andere als trivial, die Lage eines Punkts bezüglich dieses Objekts zu klassifizieren. Für andere wie etwa die algebraische Halbraumdarstellung ist das Problem dagegen trivial: Für

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(x,y,z) \le 0\right\}$$

ist P innerer Punkt, falls $f(x,y,z) < 0$ ist und Randpunkt für $f(x,y,z) = 0$; andernfalls ist P äußerer Punkt.

Da der Umgang mit (einigen der) primitiven Objekte erst Gegenstand der nächsten Kapitel ist, wollen wir hier davon ausgehen, daß es zu jedem primitiven Objekt einen Algorithmus gibt, der die Frage entscheidet; falls wir Normteile und ähnliches als primitive Objekte zulassen, müssen wir uns (bei effizientem Einsatz dieser Dateien und Programme) ohnehin auf das verlassen, was uns der Anbieter zur Verfügung stellt.

Im Augenblick geht es also nur darum, die Klassifikation eines Punkts bezüglich eines CSG-Objekts zurückzuführen auf seine Klassifikation bezüglich der primitiven Objekte, aus denen dieses zusammengesetzt ist.

Dazu müssen wir denn CSG-Baum zunächst von der Wurzel hin zu den Blättern traversieren, um das Klassifikationsproblem auf Klassifikationsprobleme für die primitiven Objekte zurückzuführen. Dies bezeichnen wir, unabhängig davon, wie sich Botaniker einen Baum vorstellen, als Traversieren von oben nach unten.

Bei diesem Abstieg nach unten ignorieren wir zunächst die regularisierten BOOLEschen Operationen und geben an jedem Knoten, der einer solchen Operation entspricht, die Frage einfach an beide (oder alle, falls es mehr als zwei gibt) darunterhängende Bäume weiter.

An den Knoten, die geometrischen Transformationen entsprechen, ist allerdings Handlungsbedarf gegeben: Ein Punkt liegt sicherlich nicht genau dann in einem gedrehten oder verschobenen Körper, wenn er im ursprünglichen Körper liegt. Um vom transformierten Körper zurückzukommen zum ursprünglichen, müssen wir zunächst die Transformation rückgängig machen. Bei jedem solchen Knoten muß also der zu klassifizierende Punkt der *inversen* Transformation unterworfen werden.

Wenn wir auf diese Weise unten angekommen sind, müssen die Klassifikationsprobleme bezüglich der primitiven Objekte in den Blättern gelöst werden; ein Problem, mit dem wir uns, wie gesagt, im Augenblick noch nicht beschäftigen wollen. Tatsächlich wird sich gleich herausstellen, daß wir gelegentlich mehr tun müssen, als den Punkt einfach zu klassifizieren; davon gleich mehr.

Danach müssen wir den Baum wieder von den Blättern aus bis zur Wurzel hochklettern. Die Knoten, die geometrischen Transformationen

entsprechen, können wir dabei ignorieren, da sie bereits beim Abstieg berücksichtigt wurden.

Die Knoten zu den regularisierten BOOLEschen Operationen dagegen haben wir beim Abstieg praktisch ignoriert; wir haben einfach die Frage an die Zweige weitergegeben. Jetzt, beim Aufstieg, müssen deren Antworten zu einer Gesamtantwort kombiniert werden.

Solange es nur darauf ankommt, ob ein Element in einer Menge liegt oder nicht, lassen sich die klassischen mengentheoretischen Operationen Vereinigung, Durchschnitt und Differenz leicht durch logische Operationen auf Aussagen über die Zugehörigkeit zu den Komponenten zurückführen. Bei der Klassifikation, für die wir uns interessieren, haben wir demgegenüber gleich zwei Komplikationen: Erstens haben anstelle der klassischen Operationen der Mengenlehre die *regularisierten* BOOLEschen Operationen, und zweitens geht es uns nicht nur darum, ob es Punkt in der Menge liegt oder nicht, sondern wir interessieren uns zusätzlich auch noch dafür, ob er innerer Punkt oder Randpunkt ist.

Die klassischen Operationen einer (extensionalen) Logik werden üblicherweise durch Wahrheitstafeln definiert; entsprechend können wir versuchen, Tafeln für die Klassifikation eines Punkts bezüglich eines geometrischen Objekts aufzustellen. Da kompakte Tabellen übersichtlicher sind, seien die drei Möglichkeiten *inneren Punkt, Randpunkt* und *äußerer Punkt* abkürzen durch *in, auf* und *aus.*

Wenn wir damit eine Tafel für die regularisierte Vereinigung aufstellen, sind acht der neun Einträge trivial: Ein innerer Punkt einer der beiden Mengen ist auch innerer Punkt der regularisierten Vereinigung; damit sind fünf Einträge erledigt. Ebenfalls völlig klar ist, daß ein äußerer Punkt einer der beiden Mengen bezüglich der regularisierten Vereinigung in derselben Weise klassifiziert wird wie bezüglich der anderen Menge; auch dies erledigt fünf Fälle, von denen allerdings zwei bereits mit der vorigen Regel erledigt wurden; insgesamt sind also erst acht Fälle erledigt.

Der noch verbleibende Fall besteht darin, daß wir einen Randpunkt *beider* Mengen haben. Dieser *kann* zum inneren Punkt der Vereinigung werden; ein Beispiel dafür sind zwei Quader, die eine Seitenfläche gemeinsam haben; jeder innere Punkt dieser gemeinsamen Seitenfläche ist innerer Punkt der (regularisierten) Vereinigung. Die Randpunkte der gemeinsamen Seitenfläche sind allerdings auch Randpunkte der Vereinigung; hier ist das Ergebnis also nicht eindeutig bestimmt durch die Ergebnisse bei den Komponenten.

Damit erhalten wir folgende Verknüpfungstafel:

$\cup^*$	*in*	*auf*	*aus*
in	*in*	*in*	*in*
auf	*in*	**?**	*auf*
aus	*in*	*auf*	*aus*

Das fette Fragezeichen steht für *auf* oder *in*.

Entsprechend ist es beim Durchschnitt: Ein Punkt, der äußerer Punkt einer der beiden Komponenten ist, muß auch äußerer Punkt des Durchschnitts sein; damit sind fünf Fälle erledigt. Entsprechend wird ein innerer Punkt einer der beiden Komponenten bezüglich des Durchschnitts genauso klassifiziert wie bezüglich der anderen Komponente; auch das erledigt wieder fünf Fälle, von denen zwei bereits geklärt sind. Übrig bleibt auch hier wieder der Fall, daß wir einen Randpunkt bezüglich beider Komponenten haben. Im Fall zweier Quader, die nur eine Randfläche (oder Teile von jeweiligen Randflächen) gemeinsam haben, ist der Punkt dann nicht im regularisierten Durchscnitt enthalten, ist also äußerer Punkt. Andererseits gibt es auch den Fall, daß der Punkt als Grenzwert einer Folge innerer Punkte aus dem Durchschnitt beider Komponenten dargestellt werden kann; beispielsweise im Falle zweier Quader, die einen dreidimensionalen Durchschnitt haben, zu dem auch ein Teil des Randes gehört. (Einfachster Fall wären zwei Quader, von denen der eine im anderen liegt und eine Randfläche hat, die ebenfalls in einer Randfläche des anderen enthalten ist.)

Hier ergibt sich also folgende Verknüpfungstafel:

$\cap^*$	*in*	*auf*	*aus*
in	*in*	*auf*	*aus*
auf	*auf*	**?**	*aus*
aus	*aus*	*aus*	*aus*

Hier steht das fette Fragezeichen hier für *auf* oder *aus*.

Genauso sieht es aus bei der regularisierten Differenz: Die Formel

$$A \setminus B = A \cap \left(\mathbb{R}^3 \setminus B\right),$$

mit der sich die gewöhnliche Mengendifferenz auf Durchschnitt und Komplement zurückführen läßt, gilt ganz entsprechend auch als

$$A \setminus^* B = A \cap^* \left(\mathbb{R}^3 \setminus^* B\right)$$

für die regularisierten Operationen. Da beim regularisierten wie beim gewöhnlichen Komplement innere Punkte zu äußeren werden, während Randpunkte Randpunkte bleiben, erhalten wir die Tabelle für die regularisierte Differenz aus der für den regularisierten Durchschnitt, indem wir einfach die erste mit der dritten Spalte vertauschen:

$\setminus^*$	*in*	*auf*	*aus*
in	*aus*	*auf*	*in*
auf	*aus*	**?**	*auf*
aus	*aus*	*aus*	*aus*

Auch hier steht das fette Fragezeichen natürlich für *auf* oder *aus*.

Bei allen drei Operationen reicht also im Falle eines gemeinsamen Randpunkts beider Komponenten die Klassifikation des Punkts in Bezug auf die beiden Komponenten nicht aus, um den Punkt bezüglich des Ergebnisses der regularisierten BOOLEschen Operation zu klassifizieren; hier müssen wir mehr Information über die Lage bezüglich der Komponenten haben.

Diese Mehrinformation verschaffen wir uns anhand der fur die meisten *Anwendungen* der Mathematik nur wenig relevante Definition eines inneren *bzw.* äußeren Punkts: Ein Punkt ist bekanntlich inneren Punkt einer

Menge $A \subseteq \mathbb{R}^3$, wenn es irgendeine Kugel um diesen Punkt gibt, die ganz in der Menge liegt; er ist äußerer Punkt, falls es eine entsprechende Kugel gibt, die ganz außerhalb der Menge liegt.

Für einen Randpunkt enthält demnach jede noch so kleine Kugel um diesen Punkt sowohl Punkte, die in der Menge liegen, als auch solche, die außerhalb liegen. Zumindest für die einfacheren Arten von primitiven Objekten, die wir in §1 betrachteten, können wir den Durchschnitt zwischen einer kleinen Kugel und einer primitiven Menge explizit berechnen: Bei einem Quader Beispielsweise ist das für einen *inneren* Punkt einer Randfläche eine Halbkugel; für einen inneren Punkt einer *Kante* ist es eine Viertelkugel und für einen Eckpunkt schließlich eine Achtelkugel.

Falls man diese Durchschnitte für die primitiven Objekte bestimmen kann, ist es auch kein Problem, sie beim Aufstieg mit den jeweiligen regularisierten BOOLEschen Operationen zu bearbeiten. Falls dabei nach Ankunft an der Wurzel eine Vollkugel herauskommt, hat man einen inneren Punkt des Objekts; falls die leere Menge herauskommt, handelt es sich um einen äußeren Punkt. In allen anderen Fällen hat man es mit einem Randpunkt zu tun.