

13. Mai 2014

## 12. Übungsblatt Zahlentheorie

### Aufgabe 1: (7 Punkte)

- Dividieren Sie in  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$  die Zahl  $3 + 4i$  mit Rest durch  $1 + 2i$  !
- Was ist der ggT von  $3 + 4i$  und  $1 + 2i$  ?
- Berechnen Sie in  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$  den ggT von  $17 + 4i$  und  $5 - 10i$  !
- Dividieren Sie in  $\mathcal{O}_{-2}$  die Zahl  $1 + 5\sqrt{-2}$  mit Rest durch  $1 - 3\sqrt{-2}$  !
- Dividieren Sie in  $\mathcal{O}_{-3}$  die Zahl  $2$  mit Rest durch  $1 + \sqrt{-3}$  !
- Dividieren Sie in  $\mathcal{O}_2$  die Zahl  $1 + 5\sqrt{2}$  mit Rest durch  $1 - 3\sqrt{2}$  !

### Aufgabe 2: (4 Punkte)

- Finden Sie in  $\mathbb{Q}[\sqrt{-13}]$  ein Element  $z$ , so daß für alle  $q \in \mathcal{O}_{-13}$  gilt  $N(z - q) > 1$  !
- Finden Sie in  $\mathcal{O}_{-13}$  zwei Elemente  $x, y$  derart, daß es keine Elemente  $q, r \in \mathcal{O}_{-13}$  gibt mit  $x = qy + r$  und  $N(r) < N(y)$  !

### Aufgabe 3: (4 Punkte)

- Berechnen Sie die Quaternion  $\frac{1}{1 + i + j + k}$  !
- Dem Vektor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  werde die Quaternion  $q_{\vec{v}} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$  zugeordnet. Drücken Sie das Produkt  $q_{\vec{v}} q_{\vec{w}}$  zweier solcher Quaternionen aus durch das Vektor- und das Skalarprodukt der Vektoren  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  !
- Bestimmen Sie alle Quaternionen  $q$  mit  $q^2 = -1$  !

### Aufgabe 4: (5 Punkte)

Eine Quaternion  $a + ib + jc + kd$  heiße *ganz*, wenn  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  ganze Zahlen sind; sie heiße *Einheit*, wenn zusätzlich auch ihr multiplikatives Inverses ganz ist. Sie heiße *irreduzibel*, wenn sie nicht als Produkt zweier ganzer Quaternionen geschrieben werden kann, von denen keine eine Einheit ist.

- Bestimmen Sie alle Einheiten unter den Quaternionen.
- Zeigen Sie, daß  $1 \pm 2i$ ,  $1 \pm 2j$  und  $1 \pm 2k$  irreduzibel sind!
- Im Ring der ganzen Quaternionen ist

$$\begin{aligned} 5 &= (1 + 2i)(1 - 2i) = (1 + 2j)(1 - 2j) = (1 + 2k)(1 - 2k) \\ &= (2 + i)(2 - i) = (2 + j)(2 - j) = (2 + k)(2 - k). \end{aligned}$$

Gibt es irgendwelche zwei unter den zwölf Faktoren in diesen Zerlegungen, die sich nur durch eine Einheit unterscheiden?

Abgabe bis zum Dienstag, dem 20. Mai 2014, um 11.55 Uhr