Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

19. Mai 2011

12. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: *(7 Punkte)*

a) Schreiben Sie 65 als Produkt irreduzibler Elemente von $\mathbb{Z}[i]$!

b) Finden Sie alle Darstellungen von 65 als Summe zweier Quadrate!

c) Leiten Sie daraus eine Formel für π ab, und berechnen Sie über die zugehörige Potenzreihenentwicklung die Zahl π mit einer Genauigkeit von mindestens fünf Dezimalstellen!

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß für jede ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ auch $k = \frac{1}{6}(m - m^3)$ ganz ist und daß gilt

$$m = m^3 + (k+1)^3 + (k-1)^3 + (-k)^3 + (-k)^3 \,!$$

b) Läßt sich jede natürliche Zahl als Summe von höchstens fünf *nichtnegativen* dritten Potenzen darstellen?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für eine ungerade Primzahl p und eine nicht durch p teilbare natürliche Zahl a ist die Gleichung $x^2 \equiv a \bmod p^2$ genau dann lösbar, wenn $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie eine Zahl x_0 mit $x_0^2 \equiv a \bmod p$ und suchen Sie dazu ein x_1, so daß $x = x_0 + px_1$ die Gleichung $x^2 \equiv a \bmod p^2$ löst!

b) Verallgemeinern Sie dieses Resultat auf die Gleichung $x^2 \equiv a \bmod p^n$ für eine beliebige natürliche Zahl n !

c) Bleiben die Ergebnisse aus *a)* und *b)* noch richtig, wenn p ein Teiler von a sein darf?

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Für welche Primzahlen p ist 17 ein quadratischer Rest modulo p ?

b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $x^2 \equiv 17 \bmod n$ eine ganzzahlige Lösung?
Hinweis: Sie können Aufgabe 3 auch dann benutzen, wenn Sie sie nicht bearbeitet haben.

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 26. Mai 2011, um 17.15 Uhr