Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

12. Mai 2011

11. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Quaternion $\dfrac{1}{1+i+j+k}$!

b) Dem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ werde die Quaternion $q_{\vec{v}} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ zugeordnet. Drücken Sie das Produkt $q_{\vec{v}} q_{\vec{w}}$ zweier solcher Quaternionen aus durch das Vektor- und das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$!

c) Bestimmen Sie alle Quaternionen q mit $q^2 = -1$!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

Eine Quaternion $a + ib + jc + kd$ heiße *ganz,* wenn $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen sind; sie heiße *Einheit,* wenn zusätzlich auch ihr multiplikatives Inverses ganz ist. Sie heiße *irreduzibel,* wenn sie nicht als Produkt zweier ganzer Quaternionen geschrieben werden kann, von denen keine eine Einheit ist.

a) Bestimmen Sie alle Einheiten unter den Quaternionen.

b) Zeigen Sie, daß $1 \pm 2i$, $1 \pm 2j$ und $1 \pm 2k$ irreduzibel sind!

c) Im Ring der ganzen Quaternionen ist

$$\begin{aligned} 5 &= (1+2i)(1-2i) = (1+2j)(1-2j) = (1+2k)(1-2k) \\ &= (2+i)(2-i) = (2+j)(2-j) = (2+k)(2-k)\,. \end{aligned}$$

Gibt es irgendwelche zwei unter den zwölf Faktoren in diesen Zerlegungen, die sich nur durch eine Einheit unterscheiden?

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

a) p sei eine Primzahl. Bestimmen Sie alle Paare $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ von natürlichen Zahlen, die die Gleichung $x^2 - y^2 = p$ erfüllen!

b) Finden Sie eine natürliche Zahl n derart, daß die Gleichung $x^2 - y^2 = n$ mindestens zwei verschiedene Lösungen $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ hat!

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*

a) Finden Sie mindestens drei Lösungen $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ der Gleichung $x^2 - 3y^2 = 1$!

b) Was können Sie über die Einheitengruppe von $\mathcal{O}_3$, der Hauptordnung von $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, sagen?

Aufgabe 5: *(4 Punkte)*

a) Finden Sie (ohne Computer oder sonstiges stumpfsinniges Ausprobieren) alle Darstellungen von 10 000 als Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen!

b) *ditto* für 810 000.

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 19. Mai 2011, um 17.15 Uhr