

5. Mai 2011

## 10. Übungsblatt Zahlentheorie

### Aufgabe 1: (3 Punkte)

$D \in \mathbb{Z}$  sei zwar keine Quadratzahl, aber auch nicht quadratfrei. Zeigen Sie, daß der Ring  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{D}$  weder EUKLIDISCH noch faktoriell ist!

### Aufgabe 2: (4 Punkte)

- a) In der Hauptordnung  $\mathcal{O}_{-3}$  von  $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$  ist  $4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$ . Zeigt dies die Nichtfaktorialität von  $\mathcal{O}_{-3}$ ? Wenn ja, warum; wenn nein, warum nicht?
- b) In der Hauptordnung  $\mathcal{O}_{-13}$  von  $\mathbb{Q}[\sqrt{-13}]$  ist  $14 = 2 \cdot 7 = (1 + \sqrt{-13})(1 - \sqrt{-13})$ . Zeigt dies die Nichtfaktorialität von  $\mathcal{O}_{-13}$ ? Wenn ja, warum; wenn nein, warum nicht?

### Aufgabe 3: (8 Punkte)

- a) Dividieren Sie in  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$  die Zahl  $3 + 4i$  mit Rest durch  $1 + 2i$ !
- b) Was ist der ggT von  $3 + 4i$  und  $1 + 2i$ ?
- c) Berechnen Sie in  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$  den ggT von  $17 + 4i$  und  $5 - 10i$ !
- d) Dividieren Sie in  $\mathcal{O}_{-2}$  die Zahl  $1 + 5\sqrt{-2}$  mit Rest durch  $1 - 3\sqrt{-2}$ !
- e) Dividieren Sie in  $\mathcal{O}_{-3}$  die Zahl  $2$  mit Rest durch  $1 + \sqrt{-3}$ !
- f) Dividieren Sie in  $\mathcal{O}_2$  die Zahl  $1 + 5\sqrt{2}$  mit Rest durch  $1 - 3\sqrt{2}$ !

### Aufgabe 4: (5 Punkte)

- a) Finden Sie in  $\mathbb{Q}[\sqrt{-13}]$  ein Element  $z$ , so daß für alle  $q \in \mathcal{O}_{-13}$  gilt  $N(z - q) > 1$ !
- b) Finden Sie in  $\mathcal{O}_{-13}$  zwei Elemente  $x, y$  derart, daß es keine Elemente  $q, r \in \mathcal{O}_{-13}$  gibt mit  $x = qy + r$  und  $N(r) < N(y)$ !
- c) Könnte  $\mathcal{O}_{-13}$  bezüglich einer anderen Funktion  $v: \mathcal{O}_{-13} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0$  ein EUKLIDISCHER Ring sein?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 12. Mai 2011, um 17.15 Uhr