

14. April 2011

9. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: (3 Punkte)

- a) a, b, c seien drei Vektoren aus \mathbb{R}^3 und D sei die Determinante der Matrix mit Spalten a, b, c . Zeigen Sie, daß das Skalarprodukt $\langle a, b \times c \rangle$ von a mit dem Vektorprodukt $b \times c$ als Länge den Betrag von D hat!
- b) Folgern Sie, daß $\langle a, b \times c \rangle = \langle b, c \times a \rangle = \langle c, a \times b \rangle$ ist!

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Die Rhinecar School of Commerce beginnt ihre Vorlesungen im Frühjahrssemester am ersten Montag nach dem 14. Februar. Die Woche vor sowie die Woche nach Ostern sind vorlesungsfrei; insgesamt gibt es 14 Vorlesungswochen. Vorlesungsfreie Tage sind der 1. Mai, Christi Himmelfahrt (Donnerstag in der zweiten Woche vor Pfingsten), Pfingstmontag (Pfingsten wird sieben Wochen nach Ostern gefeiert) und Fronleichnam (Donnerstag in der zweiten Woche nach Pfingsten). Am Maimarktdienstag können die Nachmittagsvorlesungen ausfallen. (Der Maimarkt beginnt am letzten Samstag des Aprils und dauert elf Tage; am letzten Tag, dem Maimarktdienstag, ist der Eintritt frei.) Stellen Sie einen Kalender des Frühjahrssemesters 2100 auf, in dem alle relevanten Daten eingetragen sind!

Aufgabe 3: (3 Punkte)

$(x, y) \in \mathbb{N}^2$ sei eine Lösung der Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$, wobei auch D eine natürliche Zahl sei. Zeigen Sie, daß dann x/y eine Konvergente der Kettenbruchentwicklung von \sqrt{D} sein muß!

Aufgabe 4: (6 Punkte)

- a) Stellen Sie das Element $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ in der Form $a + b\sqrt{2}$ dar!
- b) Finden Sie alle Einheiten im Ring $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$ ($i = \sqrt{-1}$)
- c) $D = n^2$ sei eine Quadratzahl. Wir definieren auf $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ eine Ringstruktur, die die Multiplikation in den Ringen $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{D}$ nachmacht, durch

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (a', b') = (aa' + bb'D, ab' + a'b).$$

Zeigen Sie, daß dieser Ring kein Integritätsbereich ist!

FROHE OSTERN UND ERHOLSAME FERIEN !