WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

3. März 2010

3. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Ein Mathematiker möchte zur Feier seines Geburtstags die Kerzen (eine für jedes Lebensjahr) so auf ausgewählten Geburtstagstorten verteilen, daß die Anzahl auf jeder dieser Torten das Quadrat einer Primzahl p ist. Bei seinen Versuchen mit $p = 2, 3$ und 5 bleiben dabei aber jeweils p Kerzen übrig. Wie alt wird er?

b) Wie alt müßte er werden, bis ihm dies zum nächsten Mal passiert?

c) Einige Zeit versucht er dasselbe bei der Feier zum Geburtstag eines klassischen griechischen Mathematikers. Aus Mangel an Torten kann er hier allerdings nicht mit so kleinen Primzahlen arbeiten und versucht es deshalb mit $p = 7$ und $p = 11$. Wieder bleiben jeweils p Kerzen übrig. Wann wurde der griechische Mathematiker geboren?

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

Beweisen sie die WILSONsche Kongruenz: Für jede Primzahl p ist $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$.
Hinweis: Betrachten Sie die Faktoren in $(p-1)!$ als Elemente des Körpers $\mathbb{F}_p$, und beachten Sie, daß mit jedem Element i auch dessen (nicht notwendigerweise von i verschiedenes) Inverses vorkommt.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Welche Ordnungen kann ein Element $a \in (\mathbb{Z}/11)^\times$ haben?

b) Bestimmen Sie für jedes der zehn Elemente dessen Ordnung!

c) Wie viele primitive Wurzeln gibt es?

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) p sei eine Primzahl, und zu $a \in \mathbb{F}_p^\times$ gebe es ein $x \in \mathbb{F}_p$ mit $x^2 = a$. Zeigen Sie: Dann ist $x^{p+1} = a$.

b) Nun sei $p \equiv 3 \bmod 4$. Zeigen Sie: Wenn es in $\mathbb{F}_p$ eine Lösung x der Gleichung $x^2 = a$ gibt, so ist auch $y = a^{(p+1)/4}$ eine Lösung.

c) Bestimmen Sie im Körper $\mathbb{F}_{127}$ die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 = 3$!

d) *Ditto* für $x^2 = 11$!

e) *Ditto* für $x^2 + 2x = 10$!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 10. März 2010, um 17.15 Uhr