

24. Februar 2011

2. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: (5 Punkte)

In einem Studentenwohnheim leben 90 Studenten; sie kommen aus Deutschland, Italien und der Schweiz. Jeder verhält sich bezüglich seines Bierkonsums genau wie der Durchschnitt seiner Landsleute, deren Verbrauch laut www.nationmaster.com im Jahr 2002 jeweils 119 l (D), 57 l (CH) und 29 l (I) waren. Im Wohnheim wurden letztes Jahr 9308 l getrunken. Wie viele Angehörige der einzelnen Nationen wohnen dort?

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Die Folge der Zahlen x_n sei definiert durch

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Finden Sie eine explizite Formel für x_n !

Aufgabe 3: (3 Punkte)

- Für zwei natürliche Zahlen $a \geq b$ braucht man Tausend Divisionen, um $\text{ggT}(a, b)$ nach dem EUKLIDISCHEN Algorithmus zu berechnen. Wie viele Dezimalstellen hat b mindestens?
- Gibt es auch Zahlen \tilde{a} und \tilde{b} mit jeweils einer Dezimalstelle mehr, so daß der EUKLIDISCHE Algorithmus genau Tausend Divisionen benötigt?

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Die rationale Zahl x erfülle die Polynomgleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie: Stellt man x dar als einen gekürzten Bruch, so ist dessen Nenner ein Teiler von a_n !

Aufgabe 5: (5 Punkte)

- Stellen Sie die Verknüpfungstabellen für Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}/6$ auf!
- Bestimmen Sie alle Lösungen der Kongruenzen $4x \equiv 2 \pmod{6}$ und $3x \equiv 2 \pmod{6}$!
- Für welche $a \in \mathbb{Z}/6$ hat die Gleichung $x^2 = a$ eine Lösung? Wie viele Lösungen hat sie dann jeweils?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 3. März 2011, um 17.15 Uhr