Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

17. Februar 2011

1. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: *(2 Punkte)*
Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist $\sqrt[n]{2}$ irrational!

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie ohne Verwendung des Satzes von der eindeutigen Primzerlegung, daß das Quadrat einer natürlichen Zahl a genau dann durch drei teilbar ist, wenn dies für a selbst der Fall ist!

b) Folgern Sie, daß $\sqrt{3}$ irrational ist!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Integrale $\int\limits_0^\pi (ax+b)^2 \sin x \, dx$ und $\int\limits_0^{2\pi} (ax+b)^2 \sin x \, dx$ für $a, b \in \mathbb{R}$!

b) Was ist $\int\limits_0^\pi x^{2n} \sin x \, dx$ für $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß für jede natürliche Zahl n gilt: $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{n!}{i!} < \frac{1}{n}$!

Hinweis: Kürzen Sie die Summanden, und schätzen Sie die Summe ab durch eine geometrische Reihe!

b) Schreiben Sie $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = \frac{a_n}{n!}$ als Bruch mit Nenner $n!$, und zeigen Sie mit Hilfe von *a)*, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{a_n}{n!} < e < \frac{a_n + 1}{n!} \quad !$$

c) Folgern Sie, daß $e = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ eine irrationale Zahl ist!

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*
Berechnen Sie die größten gemeinsamen Teiler der folgenden Zahlen und stellen Sie diese als ganzzahlige Linearkombinationen der Ausgangszahlen dar:

a) 17 und 81 *b)* 15 und 1005 *c)* 1234 und 4321

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 24. Februar 2011, um 17.15 Uhr