WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

B6, B4.08

19. November 2024

11. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie, ob die jeweils angegebenen topologischen Räume homöomorph sind, und beweisen Sie Ihre Aussage:

a) Der Rand eines n-Simplex und der eines m-Simplex für $n \neq m$

b) $\mathbb{R}^n$ und $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i : 0 < x_i < 1\}$

c) Die Oberfläche eines Würfels mit Ausnahme einer Ecke und $\mathbb{R}^2$

d) Ein Torus und ein MÖBIUS-Band

e) $\mathbb{R}^2$ ohne Nullpunkt und die Oberfläche einer Kugel

f) Das Produkt zweier offener n-Simplizes und das offene $2n$-Simplex

Aufgabe 2:

X und Y seien topologische Räume, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ seien stetige Abbbildungen, und $A \subset X$ sei HAUSDORFFsch *bzw.* kompakt *bzw.* zusammenhängend *bzw.* zusammenziehbar.

a) Hat dann auch $f(A)$ die entsprechende Eigenschaft?

b) Wie steht es mit $g^{-1}(A)$?

Aufgabe 3:

Mit welcher der folgenden Topologien ist $\mathbb{R}^n$ HAUSDORFFsch, kompakt, zusammenhängend *bzw.* zusammenziehbar?

a) der „üblichen“ Topologie

b) der diskreten Topologie

c) der trivialen Topologie

d) der Topologie, deren abgeschlossene Mengen genau die endlichen Teilmengen sowie $\mathbb{R}^n$ selbst sind!

Aufgabe 4:

Das dreidimensionale Polyeder P sei homotop zu einer Kreislinie. Bestimmen Sie die alternierende Summe seiner Ecken, Kanten und Flächen!

Aufgabe 5:

Der topologische Raum $X_n \subset \mathbb{R}^2$ mit $n \in \{7, 8, 9, 0\}$ sehe aus wie die Ziffer n. Finden Sie eine Triangulierung von X_n und berechnen Sie seine Homologie!

Aufgabe 6:

a) $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ seien konvexe Mengen. Sind dann auch $X \cap Y$ und $X \cup Y$ konvex?

b) $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^m$ seien konvexe Mengen. Ist dann auch $X \times Y$ konvex?

c) $X \subset \mathbb{R}^n$ sei abgeschlossen, und für alle $x, y \in X$ liege auch $\frac{1}{2}(x + y)$ in X. Zeigen Sie: X ist konvex!

Abgabe am Mittwoch, dem 20. November 2024, bis 15.30 Uhr im Hörsaal