Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.08

9. November 2024

10. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:

a) X sei ein Hausdorffscher topologischer Raum, und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine konvergente Folge. Zeigen Sie: Wenn eine Teilfolge dieser Folge gegen den Punkt $x \in X$ konvergiert, so auch die gesamte Folge.

b) Zeigen Sie durch Gegenbeispiele, daß hier sowohl die Hausdorff-Bedingung als auch die Konvergenz der Folge notwendig sind!

Aufgabe 2:

J sei eine Teilmenge von $\{1, 2, \dots, \ell\}$, $P = \left\{p \in \mathbb{R}^\ell \,\middle|\, p_h \geq 0 \ \forall h \text{ und } \sum_{h=1}^{\ell} p_h = 1\right\}$ und $P^\varepsilon = \left\{p \in P \,\middle|\, p_h \geq \varepsilon \ \forall h \in J\right\}$. Für welche $\varepsilon \geq 0$ ist P^ε homöomorph zu P?

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel: Jede stetige Abbildung $f\colon T \to T$ eines Torus T hat einen Fixpunkt.

b) Zeigen Sie: Jede nicht injektive stetige Abbildung $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ hat einen Fixpunkt.

c) $f \in \mathbb{C}[X]$ sei ein Polynom mit komplexen Koeffizienten. Wie muß f aussehen, wenn die durch f definierte Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ keinen Fixpunkt hat?

Aufgabe 4:

a) $S \subset \mathbb{R}^n$ sei ein abgeschlossenes Simplex, und $f\colon S \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, daß $f(S)$ ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ ist!

b) Wird dann das Innere von S in jedem Fall auf das offene Intervall (a, b) abgebildet?

c) Zeigen Sie, daß es im Fall einer linearen Abbildung f Ecken e_1 und e_2 von S gibt mit $f(e_1) = a$ und $f(e_2) = b$!

d) Angenommen, es gibt auch einen inneren Punkt des Simplex, der auf a oder b abgebildet wird, Was können Sie dann über die lineare Abbildung f aussagen?

Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie die Homologie der folgenden topologischen Räume:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \vee 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\} \\
X_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \in [0, 1] \cup [2, 3] \wedge 2 \leq y \leq 3\} \\
X_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \in [0, 1] \cup [2, 3] \wedge 2 \leq |y| \leq 3\} \\
X_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 8\} \\
X_5 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq z \leq 3\}
\end{aligned}
$$

b) $K_1, \dots, K_5$ seien geometrische simpliziale Komplexe, so daß $|K_i|$ homöomorph ist zu X_i. Weiter sei e_i die Anzahl der Ecken von K_i, k_i die der Kanten und f_i die der Dreiecke. Was können Sie über die Zahlen $e_i - k_i + f_i$ aussagen?

c) Finden Sie für X_1, X_2 und X_3 je ein Beispiel eines möglichen Komplexes K_i!

Abgabe am Mittwoch, dem 13. November 2024, bis 15.30 Uhr im Hörsaal