

30. Oktober 2024

9. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:

In einem Wirtschaftssystem gibt es drei Güter. Das erste ist ein produziertes Produkt, das zweite ein dazu benötigter Rohstoff, und das dritte ist Arbeit. Es gibt zwei Produzenten. Die Mengen ihrer möglichen Produktionspläne sind

$$Y_1 = \{(y_{11}, y_{12}, y_{13}) \mid y_{12} = -y_{11}, y_{13} = -\frac{1}{2}y_{11}, y_{11} \in [0, 120]\} \quad \text{und} \\ Y_2 = \{(y_{21}, y_{22}, y_{23}) \mid y_{22} = -\frac{3}{4}y_{21}, y_{23} = -\frac{3}{4}y_{21}, y_{21} \in [0, 80]\}.$$

Weiterhin gibt es drei Konsumenten. Ihre Mengen möglicher Verbrauchsvektoren sind

$$X_1 = \{(x_{11}, x_{12}, x_{13}) \mid x_{11} \geq 0, x_{11} + 2x_{12} \geq 10, x_{13} \in [-11, 0]\}, \\ X_2 = \{(x_{21}, x_{22}, x_{23}) \mid x_{21} \geq 2, x_{21} + 2x_{22} \geq 12, x_{23} \in [-8, 0]\} \quad \text{und} \\ X_3 = \{(x_{31}, x_{32}, x_{33}) \mid x_{31} \geq 5, x_{31} + 2x_{32} \geq 15, x_{33} \in [-3, 0]\}.$$

Die Besitzstände der drei Konsumenten werden durch die Vektoren

$$\zeta_1 = (2, 6, 12), \quad \zeta_2 = (4, 6, 9) \quad \text{und} \quad \zeta_3 = (10, 3, 3)$$

beschrieben; ihre Nützlichkeitsfunktionen sind $u_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + x_3$,

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 3x_2 + x_3 \quad \text{und} \quad u_3(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 + x_2 + 5x_3.$$

Der erste Produzent gehört ganz dem dritten Konsumenten; am zweiten Produzenten hält dieser drei Viertel der Anteile, der erste Konsument 10% und der zweite 15%.

- Versuchen Sie, das Wirtschaftssystem, die soziale Stellung der drei Konsumenten sowie die Unterschiede zwischen den beiden Produzenten inhaltlich zu beschreiben!
- Bestimmen Sie die Mengen $X = X_1 + X_2 + X_3$ und $Y = Y_1 + Y_2$!
- Untersuchen Sie, ob die Bedingungen I bis IV erfüllt sind!
- Bestimmen Sie die optimalen Produktionspläne der beiden Produzenten und deren jeweiligen Gewinn für den Preisvektor $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$!
- Bestimmen Sie für jeden der drei Konsumenten die maximalen Kosten für einen Verbrauchsvektor, den er sich leisten kann, und geben Sie explizit an, welches Optimierungsproblem zu lösen ist, um eine optimale Strategie für ihn zu finden!
- Welches ist die maximale Menge des ersten Guts in einem Verbrauchsvektor aus X_3 , den das Wirtschaftssystem realisieren kann?