

24. Oktober 2024

8. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:

Anfang 1943 war der Norden Neuguineas von Japan besetzt, der Süden von den Alliierten. Mit der Schlacht in der Bismarcksee versuchten die Japaner, ihren Einfluß auf den Norden auszudehnen. Um ihre Flotte dorthin zu bringen, hatten sie zwei Routen zur Auswahl, eine Nordroute NR und eine Südroute SR. Die Alliierten erfuhren von den Angriffsplänen und wollten die Flotte möglichst lange bombardieren, wußten aber nicht, welchen Weg diese nehmen würde. Wegen der beschränkten Anzahl von Flugzeugen mußten sie entscheiden zwischen einer schwerpunktmäßigen Suche SN im Norden oder SS im Süden. Wegen der unterschiedlichen Wetterbedingungen schätzten sie, daß sie im Falle von NR mit SN zwei Tage zum bombardieren hätten, mit SS nur einen. Im Falle von SR wären es mit SN zwei Tage, mit SS drei. Welche Strategien sollten Japaner und Alliierte nach den Paradigmen der Spieltheorie wählen?

Aufgabe 2:

In einem Zwei-Personen Nullsummenspiel lassen sich die Auszahlungen für reine Strategien in einer Matrix zusammenfassen, deren (i, j) -Eintrag die Auszahlung für den ersten Spieler angibt, wenn dieser seine i -te und der zweite seine j -te Strategie wählt. z_i sei der minimale Eintrag in der i -ten Zeile, und s_j der maximale in der j -ten Spalte. Zeigen Sie, daß es genau dann ein Gleichgewicht in reinen Strategien gibt, wenn das Maximum der z_i gleich dem Minimum der s_j ist!

Aufgabe 3:

- Angenommen, Sie wissen daß Ihr Gegner beim Spiel *Stein-Schere-Papier* mit Wahrscheinlichkeit p_1 den Stein, mit Wahrscheinlichkeit p_2 die Schere und mit Wahrscheinlichkeit p_3 das Papier wählt, wobei $p_1 \geq p_2 \geq p_3$ ist. Mit welcher Strategie können Sie den Erwartungswert Ihres Gewinns maximieren?
- Was ändert sich, wenn die Ungleichung $p_1 \geq p_2 \geq p_3$ nicht erfüllt ist?
- Umgekehrt sei dem Gegner Ihre Strategie bekannt und Sie gehen davon aus, daß er in einer für ihn optimalen Weise darauf reagiert. Wie müssen Sie Ihre Strategie wählen, damit der Erwartungswert Ihres Gewinns trotzdem möglichst groß wird?

Aufgabe 4:

Zwei Spieler wählen unabhängig voneinander eine der Alternativen *Kopf* oder *Zahl*. Wenn beide dieselbe Wahl treffen, gewinnt der erste Spieler, andernfalls der zweite.

- Geben Sie geeignete Auszahlungsfunktionen für die beiden Spieler in Abhängigkeit von den möglichen Strategien an!
- Zeigen Sie: Es gibt kein NASH-Gleichgewicht in reinen Strategien!
- Bestimmen Sie alle NASH-Gleichgewichte in gemischten Strategien!
- Untersuchen Sie diese auf PARETO-Effizienz!

Aufgabe 5:

Zeigen Sie, daß in einem Zwei-Personen-Nullsummenspiel jede Kombination von (auch gemischten) Strategien der beiden Spieler PARETO-effizient ist!

Abgabe am Mittwoch, dem 30. Oktober 2024, bis 15.30 Uhr im Hörsaal