

17. Oktober 2024

7. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:

Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *nullhomotop*, wenn es einen Punkt $z \in Y$ gibt, so daß f homotop ist zur Abbildung, die jeden Punkt $x \in X$ auf z abbildet. Zeigen Sie:

- Jede stetige Abbildung eines topologischen Raums in eine konvexe Teilmenge eines \mathbb{R}^n ist nullhomotop.
- Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenziehbar, wenn die identische Abbildung $\text{id}: X \rightarrow X$ nullhomotop ist.
- Jede konvexe Teilmenge eines \mathbb{R}^n ist zusammenziehbar.
- \mathbb{R}^n ist zusammenziehbar
- Trotzdem gibt es fixpunktfreie Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, z.B. die Translationen. Warum widerspricht dies nicht der Verallgemeinerung des BROUWERSchen Fixpunktsatzes?

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, daß Homotopie von Abbildungen sowie Homotopie von topologischen Räumen Äquivalenzrelationen sind!

Aufgabe 3:

Für zwei Korrespondenzen $f: X \rightrightarrows Y$ und $g: Y \rightrightarrows Z$ sei die Hintereinanderausführung definiert als

$$g \circ f: \begin{cases} X \rightrightarrows Z \\ x \mapsto \bigcup_{y \in f(x)} g(y) \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

- $(g \circ f)^+(U) = f^+(g^+(U))$ für alle Teilmengen $U \subseteq Z$.
- $(g \circ f)^-(U) = f^-(g^-(U))$ für alle Teilmengen $U \subseteq Z$.
- Sind f und g halbstetig nach oben, so auch $g \circ f$.
- Sind f und g halbstetig nach unten, so auch $g \circ f$.

Aufgabe 4:

Eine Korrespondenz $f: X \rightrightarrows Y$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt halbstetig nach oben im Punkt $x_0 \in X$, wenn es zu jeder offenen Menge $U \subseteq Y$, die $f(x_0)$ enthält, eine Umgebung V von x_0 gibt, so daß $f(x) \subseteq U$ für alle $x \in V$. Sie heißt halbstetig nach unten in x_0 , wenn es zu jeder offenen Menge U mit $U \cap f(x_0) \neq \emptyset$ eine Umgebung V von x_0 gibt, so daß $U \cap f(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in V$. Zeigen Sie: f ist genau dann halbstetig nach oben bzw. unten, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in X$ halbstetig nach oben bzw. unten ist.