Wolfgang K. Seiler B6, B4.08
Tel. 2515

10. Oktober 2024

6. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:
Entscheiden Sie, welche der folgenden topologischen Räume zueinander homöomorph sind: Der Kreisring $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, die Würfel $W_n = (0,1)^n$, die Sphäre $\mathbb{S}^2$, die Räume $\mathbb{R}^n$ und der Torus!

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, daß jede Karte auf einem Torus mit höchstens sieben Farben so gefärbt werden kann, daß keine zwei benachbarten Gebiete die gleiche Farbe haben!

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, daß $A = \{(a+3b, 2a-b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe vom Rang zwei von $\mathbb{Z}^2$ ist!

b) Der Homomorphismus $f\colon A \to A$ bilde den Punkt $(1,2)$ ab auf $(4,1)$ und $(3,-1)$ auf $(-1,-6)$. Berechnen Sie die Spur von f!

c) Welchen Rang hat die Gruppe $B = \{(6a+3b, 4a+2b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$?

d) Welche Spur hat die Abbildung, die jeden Punkt (x,y) auf $(2x,2y)$ abbildet, als Homomorphismus $A \to A$ *bzw.* als Homomorphismus $B \to B$?

Aufgabe 4:
Berechnen Sie für die folgenden Abbildungen der Kreislinie $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ auf sich selbst die Lefschetz-Zahlen:

a) Drehung um 90°

b) Spiegelung an der x-Achse

c) Spiegelung am Nullpunkt

d) Die Abbildung, die den Punkt $(\cos t, \sin t)$ abbildet auf $(\cos 2t, \sin 2t)$.

e) Was ändert sich, wenn Sie die genannten Abbildungen auf der Kreisscheibe betrachten?

Aufgabe 5:

a) Zeigen Sie elementar, daß jede stetige Abbildung eines abgeschlossenen Intervalls auf sich selbst einen Fixpunkt hat!

b) Gilt das auch für offene Intervalle?

c) X sei eine kompakte konvexe Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß jede stetige Abbildung $f\colon X \to X$ einen Fixpunkt hat!

Abgabe am Mittwoch, dem 16. Oktober 2024, bis 15.30 Uhr im Hörsaal