WOLFGANG K. SEILER B6, B4.08
Tel. 2515

26. September 2024

4. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:
Zerlegen Sie das Dreiecksprisma mit Ecken $P_i = (0, 0, i)$, $Q_i = (1, 0, i)$ und $R_i = (0, 1, i)$ mit $i \in \{0, 1\}$ in (offene) Simplizes! Wie viele Simplizes der Dimensionen $0, 1, 2, 3$ brauchen Sie? Was ist die alternierende Summe der Ecken, Kanten, Flächen und Körper?

Aufgabe 2:
Der simpliziale Komplex K bestehe aus dem Punkten $P_0 = (0, 0)$ sowie $n \geq 3$ Punkten $P_1, \ldots, P_n$, die im Gegenuhrzeigersinn auf einem Kreis um P_0 liegen. Seine Kanten seien $k_i = \overline{P_i P_{i+1}}$ für $i = 1, \ldots, n-1$, $k_n = \overline{P_n P_1}$ und $\ell_i = \overline{P_0 P_i}$ für $i = 1, \ldots, n$. Die Dreiecke sind $\triangle_i = \triangle P_0 P_i P_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $\triangle_n = \triangle P_0 P_n P_1$.

a) Skizzieren Sie K für $n = 6$!

b) Orientieren Sie die Kanten so, daß P_0 der Anfangspunkt aller ℓ_i ist und P_i der von k_i. Die Dreiecke seien im Uhrzeigersinn orientiert. Berechnen Sie damit die Ränder der Ketten $\sum_{i=1}^{n} k_i$, $\sum_{i=1}^{n} \ell_i$, $\sum_{i=1}^{n} ik_i$, $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i$!

c) Bestimmen Sie die Ränge aller Ketten-, Zykel- und Rändergruppen!

d) Berechnen Sie die Homologiegruppen von K !

Aufgabe 3:
Der abstrakte simpliziale Komplex $\mathfrak{K}$ bestehe aus $n \geq 3$ Ecken $P_1, \ldots, P_n$, den Kanten $k_i = \{P_i, P_{i+1}\}$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $\ell_i = \{P_1, P_i\}$ für $i = 3, \ldots, n$, sowie den Dreiecken $\triangle_i = \{P_1, P_i, P_{i+1}\}$ für $i = 2, \ldots, n-1$.

a) Skizzieren Sie für $n = 6$ eine geometrische Realisierung dieses Komplexes in $\mathbb{R}^2$!

b) Orientieren Sie alle Dreiecke im Uhrzeigersinn und die Kanten so, daß P_i der Anfangspunkt von k_i ist, P_n der von ℓ_n und P_1 der der übrigen ℓ_i. Berechnen Sie damit die Ränder der Ketten $\sum_{i=1}^{n-1} k_i$, $\sum_{i=3}^{n-1} \ell_i$, $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i ik_i$ und $\sum_{i=2}^{n-1} \Delta_i$!

c) Bestimmen Sie die Ränge aller Ketten-, Zykel- und Rändergruppen!

d) Berechnen Sie die Homologiegruppen von $\mathfrak{K}$!

Aufgabe 4:
Finden Sie einen geometrischen simplizialen Komplex K, für den $|K|$ homöomorph zum Kreisring $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ ist, und berechnen Sie dessen Homologiegruppen!

Aufgabe 5:

a) Ein (geometrischer) simplizialer Komplex K heißt zusammenhängend, wenn je zwei Ecken von K durch einen Kantenzug verbunden werden können. Zeigen Sie: K ist genau dann zusammenhängend, wenn der topologische Raum $|K|$ zusammenhängend ist.

b) Der KRONECKER-Index einer 0-Kette $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i P_i$ aus K mit Ecken P_i ist $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i$. Zeigen Sie: Ist K zusammenhängend, so ist eine 0-Kette genau dann ein Rand, wenn ihr KRONECKER-Index verschwindet.

c) Zwei 0-Zykeln eines zusammenhängenden simplizialen Komplexes liegen genau dann in derselben Homologieklasse, wenn sie denselben KRONECKER-Index haben.

d) Für einen zusammenhängenden simplizialen Komplex K ist $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

e) Finden Sie ein Beispiel eines simplizialen Komplexes K mit $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^2$ und $H_1(K) \cong \mathbb{Z}$!

Abgabe am Mittwoch, dem 2. Oktober 2024, bis 15.30 Uhr im Hörsaal