Wolfgang K. Seiler B6, B4.08
Tel. 2515

19. September 2024

3. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:

Zeigen Sie:

a) In einem kompakten topologischen Raum ist der Durchschnitt beliebig vieler kompakter Teilmengen kompakt.

b) In einem kompakten Raum hat jede unendliche Teilmenge einen Häufungspunkt.

c) Ein topologischer Raum ist genau dann quasikompakt, wenn jedes zentrierende System abgeschlossener Teilmengen nichtleeren Durchschnitt hat. Dabei heißt ein Mengensystem zentrierend, wenn der Durchschnitt von endlich vielen dieser Mengen nie leer ist.

d) Jede kompakte Teilmenge Z eines metrischen Raums X hat endlichen Durchmesser.

Aufgabe 2:

a) X sei ein beliebiger topologischer Raum, und ∞ stehe für einen Punkt, der nicht in X enthalten ist. Weiter sei $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$, und eine Teilmenge U von $\widehat{X}$ heiße offen, wenn U eine offene Teilmenge von X ist oder wenn $\infty \in U$ und $\widehat{X} \setminus U$ eine kompakte Teilmenge von X ist. Zeigen Sie, daß $\widehat{X}$ durch diese Definition zu einem kompakten topologischen Raum wird! ($\widehat{X}$ heißt Ein-Punkt-Kompaktifizierung oder Alexandroff-Kompaktifizierung von X.)

b) Zeigen Sie, daß $\widehat{\mathbb{R}}$ homöomorph zur Kreislinie ist!

Aufgabe 3:

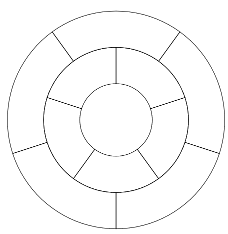
a) In der deutschsprachigen Wikipedia ist ein Stadtplan von Königsberg aus dem Jahr 1255 zu finden. Damals gab es zusätzlich zu den sieben Brücken zur Zeit Eulers noch eine dritte Brücke vom Kneiphof A in die Altstadt C. Konnte man damals einen Spaziergang machen, der genau einmal über jede der acht Brücken führte?

b) Im zweiten Weltkrieg wurde alle sieben Brücken zerstört. Im heutigen Kaliningrad gibt es nur noch fünf von Eulers sieben Brücken: Von beiden Ufern des Pregel führt heute nur noch je eine Brücke auf den Kneiphof. Ist es nun möglich, einen Weg zu finden, der jede der fünf Brücken genau einmal überquert?

c) Bevor sich der Pregel in zwei Arme teilt, wird er ebenfalls von einer Brücke überquert. Wie ändert sich die Antworten bei *b)*, wenn man einen Weg über alle sechs Brücken sucht?

Aufgabe 4:

Färben Sie die rechts stehende Karte so mit vier Farben, daß keine zwei benachbarte Gebiete die gleiche Farbe haben!



Abgabe am Mittwoch, dem 25. September 2024, bis 15.30 Uhr im Hörsaal