Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.08

12. September 2024

2. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie: In einem Hausdorff-Raum ist jede einelementige Teilmenge abgeschlossen.

b) Ist umgekehrt jeder topologische Raum, in dem alle einelementigen Teilmengen abgeschlossen sind, Hausdorffsch?

c) Geben Sie ein Beispiel eines topologischen Raums, in dem nicht jede einelementige Menge abgeschlossen ist!

Aufgabe 2:

a) Für $X = \{i, s\}$ sei $\mathcal{T} = \big\{\emptyset, \{i\}, X\big\}$. Zeigen Sie, daß $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist!

b) Ist dieser Raum Hausdorffsch?

c) $\mathbb{R}^{n\times n}$ sei die Menge aller reeller $n \times n$-Matrizen, versehen mit der üblichen reellen Topologie, und $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to X$ bilde eine Matrix A ab auf i, wenn sie invertierbar ist, und auf s sonst. Zeigen Sie, daß f eine stetige Abbildung ist!

d) Zeigen Sie, daß eine Teilmenge $U \subseteq X$ genau dann offen ist, wenn $f^{-1}(U)$ offen ist!

Aufgabe 3:

a) X und Y seien zwei topologische Räume, und $X \times Y$ trage die Produkttopologie. Zeigen Sie, daß die Projektionen $(x, y) \mapsto x$ und $(x, y) \mapsto y$ von $X \times Y$ auf X und auf Y stetig sind!

b) $X \times Y$ ist genau dann Hausdorffsch, wenn sowohl X als auch Y Hausdorffsch sind.

c) X sei Hausdorffsch, und $f\colon X \to Y$ sei eine stetige Abbildung. Muß dann auch Y Hausdorffsch sein?

Aufgabe 4:

a) $X = U \cup V$ sei eine Darstellung eines topologischen Raums X als Vereinigung zweier disjunkter offener Teilmengen U und V. Zeigen Sie: Jede zusammenhängende Teilmenge Z von X liegt ganz in U oder ganz in V.

b) X und Y seien zusammenhängende topologische Räume, und $X \times Y = U \cup V$ sei eine Darstellung ihres Produkts als Vereinigung zweier disjunkter offener Teilmengen U und V. Zeigen Sie: Liegt ein Punkt $(x_0, y_0) \in X \times Y$ in U, so auch jeder Punkt (x_0, y) mit $y \in Y$ und jeder Punkt (x, y_0) mit $x \in X$.

c) Zeigen Sie: Sind X und Y zwei topologische Räume, so ist $X \times Y$ genau dann zusammenhängend, wenn sowohl X als auch Y zusammenhängend sind.

d) Gilt eine entsprechende Aussage auch für wegzusammenhängend?

Aufgabe 5:

a) Zeigen Sie: Eine bijektive stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ abgeschlossen in Y ist.

b) Ist X kompakt und $Y \subset \mathbb{R}^n$, so ist jede bijektive stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus.

c) Finden Sie eine surjektive stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen und eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ derart, daß $f(A)$ nicht abgeschlossen ist!

Abgabe am Mittwoch, dem 18. September 2024, bis 15.30 Uhr im Hörsaal