Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.08

4. September 2024

1. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, daß keine zwei der folgenden vier Teilmengen von $\mathbb{R}$ homöomorph sind:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x^2 < 3\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x \le 3\}, \qquad D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x^2 \le 3\}$$

b) Ist $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x < 3\}$ homöomoorph zu $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \le 3\}$?

Aufgabe 2:

Eine Teilmenge von $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt *konvex,* wenn sie mit mit je zwei Punkten P, Q auch deren Verbindungsstrecke enthält. Zeigen Sie: Jede kompakte konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist homöomorph zu einer Kugel $\mathbb{B}^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + \cdots + x_m^2 \le 1\}$!

Aufgabe 3:

a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sei mit der Spurtopologie versehen. Entscheiden Sie für jede der drei Mengen $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x^2 < 3\}$ und $C = \{1\}$, ob sie offen, abgeschlossen, beides oder keins von beiden ist!

b) Zeigen Sie, daß die Spurtopologie auf $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ die diskrete Topologie ist!

Aufgabe 4:

a) X sei eine Menge, und $\mathcal{A}$ sei eine Menge von Teilmengen von X, für die gilt:

1.) $X \in \mathcal{A}$ und $\emptyset \in \mathcal{A}$

2.) Ist I eine beliebige Indexmenge und ist $Z_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in I$, so liegt auch der Durchschnitt $\bigcap\limits_{i \in I} Z_i$ der Z_i in $\mathcal{A}$.

3.) Sind für eine natürliche Zahl r die Mengen $Z_1, \dots, Z_r$ Elemente von $\mathcal{A}$, so auch ihre Vereinigung $\bigcup_{i=1}^r Z_i$.

Weiter sei $\mathcal{T} = \{U \in \mathfrak{P}(X) \mid X \setminus U \in \mathcal{A}\}$. Zeigen Sie, daß $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist!

b) Für $X = \mathbb{R}$ bestehe $\mathcal{A}$ aus allen endlichen Teilmengen sowie aus $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ selbst. Zeigen Sie, daß alle Bedingungen aus *a)* erfüllt sind!

c) Y sei $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie. Ist eine der identischen Abbildungen $X \to Y$ und $Y \to X$ stetig?

Abgabe am Mittwoch, dem 11. September 2024, bis 15.30 Uhr im Hörsaal