Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

18. April 2019

8. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Für zwei Korrespondenzen $f: X \to\!\!\to Y$ und $g: Y \to\!\!\to Z$ sei die Hintereinanderausführung definiert als

$$g \circ f: \begin{cases} X \to\!\!\to Z \\ x \mapsto \displaystyle\bigcup_{y \in f(x)} g(y) \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

a) $(g \circ f)^+(U) = f^+\big(g^+(U)\big)$ für alle Teilmengen $U \subseteq Z$.

b) $(g \circ f)^-(U) = f^-\big(g^-(U)\big)$ für alle Teilmengen $U \subseteq Z$.

c) Sind f und g halbstetig nach oben, so auch $g \circ f$.

d) Sind f und g halbstetig nach unten, so auch $g \circ f$.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Eine Korrespondenz $f: X \to\!\!\to Y$ heißt halbstetig nach unten im Punkt $x \in X$ wenn es zu jeder offenen Teilmenge $V \subseteq Y$ mit $V \cap f(x) \neq \emptyset$ eine offene Umgebung U von x gibt, so daß $f(x') \cap V \neq \emptyset$ für alle $x' \in U$; sie heißt halbstetig nach oben in x, wenn es zu jeder offenen Teilmenge $V \subseteq Y$ mit $f(x) \subseteq V$ eine offene Umgebung U von x gibt, so daß $f(x') \subseteq V$ für alle $x' \in U$. Zeigen Sie, daß f genau dann halbstetig nach unten *bzw.* oben ist, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ halbstetig nach unten *bzw.* oben ist!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Der Graph $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ einer Abbildung $f: X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X mit Grenzwert x und konvergiert die Folge der $f(x_n)$ in Y gegen y, so ist $y = f(x)$.

b) Ist jede Funktion mit abgeschlossenem Graphen stetig?

Aufgabe 4: *(7 Punkte)*

a) Eine Korrespondenz $f: X \to\!\!\to Y$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Graph abgeschlossen ist. Zeigen Sie, daß die Korrespondenz

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to\!\!\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \{1/x\} & \text{falls } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{falls } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

abgeschlossen ist, aber weder halbstetig nach oben noch halbstetig nach unten.

b) Ist Y kompakt, so ist $f: X \to\!\!\to Y$ genau dann abgeschlossen, wenn f halbstetig nach oben ist.

c) Falls der Graph von f offen ist, ist f halbstetig nach unten.

d) Ist $f: X \to\!\!\to Y$ halbstetig nach oben und ist $f(x)$ kompakt für alle $x \in X$, ist auch $f(Z)$ kompakt für jede kompakte Teilmenge $Z \subseteq X$.

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 2. Mai 2019, um 15.25 Uhr