

5. April 2019

7. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *nullhomotop*, wenn es einen Punkt $z \in Y$ gibt, so daß f homotop ist zur Abbildung, die jeden Punkt $x \in X$ auf z abbildet. Zeigen Sie:

- Jede stetige Abbildung eines topologischen Raums in eine konvexe Teilmenge eines \mathbb{R}^n ist nullhomotop.
- Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenziehbar, wenn die identische Abbildung $\text{id}: X \rightarrow X$ nullhomotop ist.
- Jede konvexe Teilmenge eines \mathbb{R}^n ist zusammenziehbar.
- \mathbb{R}^n ist zusammenziehbar
- Trotzdem gibt es fixpunktfreie Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, z.B. die Translationen. Warum widerspricht dies nicht der Verallgemeinerung des BROUWERSchen Fixpunktsatzes?

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Zeigen Sie, daß Homotopie von Abbildungen sowie Homotopie von topologischen Räumen Äquivalenzrelationen sind!

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Hier geht es um einen alternativen Beweis des BROUWERSchen Fixpunktsatzes: $f: B^n \rightarrow B^n$ sei eine fixpunktfreie Abbildung der Vollkugel auf sich selbst. Dann läßt sich wie folgt eine Abbildung $g: B^n \rightarrow B^n$ mit der Randsphäre S^{n-1} als Bild definieren: Man betrachte zu jedem Punkt $x \in B^n$ den Strahl von x durch $f(x)$ und definiere $g(x)$ als dessen Schnittpunkt mit $S^{n-1} \subset B^n$.

- Wenn f stetig ist, ist offensichtlich auch g stetig. Zeigen Sie, daß g homotop ist zur Identität auf B^n .
- Zeigen Sie, daß die Einschränkung von g zu einer Abbildung $h: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ surjektiv ist.
- Zeigen Sie, daß h auch nullhomotop ist.
- Beweisen Sie so den BROUWERSchen Fixpunktsatz!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 11. April 2019, um 15.25 Uhr