

29. März 2019

## 6. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

### Aufgabe 1: (10 Punkte)

Ein topologischer Raum  $X$  heißt *lokal kompakt*, wenn er HAUSDORFFsch ist und jeder Punkt  $x \in X$  eine kompakte Umgebung hat.

- a) Zeigen Sie, daß jeder  $\mathbb{R}^n$  lokal kompakt ist!
- b)  $X$  sei ein lokal kompakter topologischer Raum. Die ALEXANDROFF-Kompaktifizierung von  $X$  ist  $\hat{X} = X \cup \{\omega\}$  für irgendein  $\omega \notin X$ , wobei eine Teilmenge  $U \subset \hat{X}$  offen sein soll genau dann, wenn sie entweder eine offene Teilmenge von  $X$  ist oder aber das Komplement einer kompakten Teilmenge von  $X$ . Zeigen Sie, daß diese Vorschrift in der Tat eine Topologie auf  $\hat{X}$  definiert und daß  $\hat{X}$  damit ein kompakter topologischer Raum wird!
- c) Zeigen Sie: Für  $n \geq 1$  ist die ALEXANDROFF-Kompaktifizierung von  $\mathbb{R}^n$  homöomorph zur  $n$ -Sphäre  $S^n$ .
- d) Zeigen Sie: Sind  $X, Y$  zwei zueinander homöomorphe topologische Räume, so sind auch ihre ALEXANDROFF-Kompaktifizierungen  $\hat{X}$  und  $\hat{Y}$  zueinander homöomorph.
- e) Folgern Sie, daß  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  für  $n \neq m$  nicht zueinander homöomorph sind!

### Aufgabe 2: (5 Punkte)

Zeigen Sie, daß jede Karte auf einem Torus mit höchstens sieben Farben so gefärbt werden kann, daß keine zwei Nachbargebiete die gleiche Farbe haben!

### Aufgabe 3: (5 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden Abbildungen der Kreislinie  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  auf sich selbst die LEFSCHETZ-Zahlen:

- a) Drehung um  $90^\circ$
- b) Spiegelung an der  $x$ -Achse
- c) Spiegelung am Nullpunkt.
- d) Was ändert sich, wenn Sie die genannten Abbildungen auf der Kreisscheibe betrachten?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 4. April 2019, um 15.25 Uhr