

8. März 2019

3. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Zerlegen Sie das Dreiecksprisma mit Ecken $P_i = (0, 0, i)$, $Q_i = (1, 0, i)$ und $R_i = (0, 1, i)$ mit $i \in \{0, 1\}$ in (offene) Simplizes! Wie viele Simplizes der Dimensionen 0, 1, 2, 3 brauchen Sie? Was ist die alternierende Summe der Ecken, Kanten, Flächen und Körper?

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Der abstrakte simpliziale Komplex \mathfrak{K} bestehe aus n Ecken P_1, \dots, P_n , den Kanten $\overline{P_i P_{i+1}}$ für $i = 1, \dots, n-1$ und $\overline{P_1 P_i}$ für $i = 2, \dots, n$, sowie den Dreiecken $\triangle P_1 P_i P_{i+1}$ für $i = 2, \dots, n-1$.

- Skizzieren Sie für $n = 6$ eine geometrische Realisierung dieses Komplexes in \mathbb{R}^2 !
- Bestimmen Sie die Ränge aller Ketten-, Zykel- und Rändergruppen!
- Berechnen Sie die Homologiegruppen von \mathfrak{K} !

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Finden Sie einen simplizialen Komplex K , für den $|K|$ homöomorph zum Kreisring $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ ist und berechnen Sie dessen Homologiegruppen!

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Ein simplizialer Komplex K heißt zusammenhängend, wenn je zwei Ecken von K durch einen Kantenzug verbunden werden können. Zeigen Sie: K ist genau dann zusammenhängend, wenn der topologische Raum $|K|$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Der KRONECKER-Index einer 0-Kette $\sum_{i=1}^r a_i e_i$ eines simplizialen Komplexes K mit Ecken e_i ist $\sum_{i=1}^r a_i$. Zeigen Sie:

- Ist K zusammenhängend, so ist eine 0-Kette genau dann ein Rand, wenn ihr KRONECKER-Index verschwindet.
- Zwei 0-Zykeln eines zusammenhängenden simplizialen Komplexes liegen genau dann in derselben Homologiekategorie, wenn sie denselben KRONECKER-Index haben.
- Für einen zusammenhängenden simplizialen Komplex K ist $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 14. März 2019, um 15.25 Uhr