

21. Februar 2019

2. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: (4 Punkte)

- $f: X \rightarrow Y$ sei eine surjektive stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen. Zeigen Sie: Wenn X wegzusammenhängend ist, dann auch Y .
- Zeigen Sie: Das Produkt $X \times Y$ zweier wegzusammenhängender Räume X und Y ist wegzusammenhängend.
- Gilt dies auch für zusammenhängende Räume? (*Hinweis: Für jeden Punkt $x \in X$ ist $\{x\} \times Y$ homöomorph zu Y .*)

Aufgabe 2: (4 Punkte)

- $f: X \rightarrow Y$ sei eine stetige surjektive Abbildung, und Y sei kompakt. Zeigen oder widerlegen Sie, daß dann auch X kompakt sein muß!
- Zeigen oder widerlegen Sie: Sind X und Y kompakte topologische Räume, so auch $X \times Y$ (bezüglich der Produkttopologie).

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- Zeigen Sie: Eine bijektive stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ abgeschlossen in Y ist.
- Ist X kompakt und Y HAUSDORFFsch, so ist jede bijektive stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus.
- Finden Sie eine surjektive stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen und eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ derart, daß $f(A)$ nicht abgeschlossen ist!

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Seit EULERS Zeiten hat sich an den Königsberger Brücken viel geändert; insbesondere wurden alle sieben während des zweiten Weltkriegs zerstört. Im heutigen Kaliningrad gibt es nur noch fünf von EULERS sieben Brücken: Von beiden Ufern des Pregel führt heute nur noch je eine Brücke auf den Kneiphof.

- Ist es nun möglich, einen Weg zu finden, der jede der fünf Brücken genau einmal überquert?
- Gibt es einen solchen Weg mit gleichem Anfangs- und Endpunkt?
- Bevor sich der Pregel in zwei Arme teilt, wird er ebenfalls von einer Brücke überquert. Wie ändern sich die Antworten bei *a)* und *b)*, wenn man einen Weg über alle sechs Brücken sucht?

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Färben Sie die rechts stehende Karte so mit vier Farben, daß keine zwei benachbarte Gebiete die gleiche Farbe haben!

