

15. Februar 2019

1. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: (6 Punkte)

- a) Zeigen Sie, daß die Teilmenge $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ und } y \neq 1\}$ von \mathbb{R}^2 homöomorph zu \mathbb{R} ist!
- b) Zeigen Sie, daß keine zwei der folgenden vier Teilmengen von \mathbb{R} homöomorph sind:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}, & B &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x^2 < 3\}, \\ C &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}, & D &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x^2 \leq 3\} \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

- a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sei mit der Spurtopologie versehen. Entscheiden Sie für jede der folgenden Mengen, ob sie offen, abgeschlossen, beides oder keins von beiden ist:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x < 3\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x^2 < 3\}, \quad C = \{1\}$$

- b) Zeigen Sie, daß die Spurtopologie auf $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ die diskrete Topologie ist!

Aufgabe 3: (6 Punkte)

- a) k sei ein Körper und $k[X_1, \dots, X_n]$ sei die Menge aller Polynome in n Veränderlichen mit Koeffizienten aus k . Für jede Teilmenge $M \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ sei

$$V(M) = \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in M\}.$$

Zeigen Sie, daß k^n ein topologischer Raum wird, wenn wir verlangen, daß genau die Mengen $V(M)$ abgeschlossen sind!

- b) Wie lassen sich die abgeschlossenen Mengen im Fall $n = 1$ einfacher beschreiben?
- c) Ist k^n HAUSDORFFsch?
- d) Speziell für $k = \mathbb{R}$ sei X der \mathbb{R}^n mit der gerade definierten Topologie und Y sei der \mathbb{R}^n mit der üblichen Topologie. Ist eine der identischen Abbildungen $X \rightarrow Y$ und $Y \rightarrow X$ stetig?

Aufgabe 4: (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie, daß jede einelementige Teilmenge eines HAUSDORFF-Raums abgeschlossen ist!
- b) X und Y seien HAUSDORFF-Räume und $X \times Y$ trage die Produkttopologie. Zeigen Sie, daß auch diese HAUSDORFFsch ist!
- c) X sei HAUSDORFFsch und $f: X \rightarrow Y$ sei eine stetige surjektive Abbildung. Muß dann auch Y HAUSDORFFsch sein?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 21. Februar 2019, um 15.25 Uhr