Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

2. November 2016

8. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Für zwei Korrespondenzen $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ und $g\colon Y \twoheadrightarrow Z$ sei die Hintereinanderausführung definiert als

$$g \circ f\colon \begin{cases} X \twoheadrightarrow Z \\ x \mapsto \bigcup\limits_{y \in f(x)} g(y) \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

a) $(g \circ f)^+(U) = f^+\big(g^+(U)\big)$ für alle Teilmengen $U \subseteq Z$.

b) $(g \circ f)^-(U) = f^-\big(g^-(U)\big)$ für alle Teilmengen $U \subseteq Z$.

c) Sind f und g halbstetig nach oben, so auch $g \circ f$.

d) Sind f und g halbstetig nach unten, so auch $g \circ f$.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Eine Korrespondenz $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ heißt *injektiv,* wenn für zwei verschiedene Punkte x, x' aus X gilt: $f(x) \cap f(x') = \emptyset$. Sie heißt *eindeutig,* wenn alle Mengen $f(x)$ einelementig sind, und *halbeindeutig,* wenn aus $f(x) \cap f(x') \neq \emptyset$ folgt, daß $f(x) = f(x')$ ist. Zeigen Sie:

a) Jede eindeutige Korrespondenz ist halbeindeutig.

b) Ist f injektiv, so ist die Korrespondenz $f^-\colon Y \to X$ mit $f^-(y) = \{x \in X \mid y \in f(x)\}$ eindeutig.

c) Ist f eindeutig, so ist f^- injektiv.

d) Ist f halbeindeutig, so auch f^-.

e) Das untere Urbild eine Teilmenge $A \subset Y$ ist das Bild von A unter f^-.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Eine Korrespondenz $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ heißt halbstetig nach unten im Punkt $x \in X$ wenn es zu jeder offenen Teilmenge $V \subseteq Y$ mit $V \cap f(x) \neq \emptyset$ eine offene Umgebung U von x gibt, so daß $f(x') \cap V \neq \emptyset$ für alle $x' \in U$; sie heißt halbstetig nach oben in x, wenn es zu jeder offenen Teilmenge $V \subseteq Y$ mit $f(x) \subseteq V$ eine offene Umgebung U von x gibt, so daß $f(x') \subseteq V$ für alle $x' \in U$. Zeigen Sie:

a) f ist genau dann halbstetig nach unten, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ halbstetig nach unten ist.

b) f ist genau dann halbstetig nach oben, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ halbstetig nach oben ist.

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*
Zeigen Sie: Ist $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ halbstetig nach oben und $Z \subseteq X$ kompakt, so ist auch $f(X)$ kompakt.

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 10. November 2016, um 15.25 Uhr