Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

21. Oktober 2016

7. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

Eine stetige Abbildung $f: X \to Y$ heißt *nullhomotop,* wenn es einen Punkt $z \in Y$ gibt, so daß f homotop ist zur Abbildung, die jeden Punkt $x \in X$ auf z abbildet. Zeigen Sie:

a) Jede stetige Abbildung eines topologischen Raums in eine konvexe Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ ist nullhomotop.

b) Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenziehbar, wenn die identische Abbildung $\mathrm{id}: X \to X$ nullhomotop ist.

c) Jede konvexe Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ ist zusammenziehbar.

d) $\mathbb{R}^n$ ist zusammenziehbar

e) Trotzdem gibt es fixpunktfreie Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, z.B. die Translationen. Warum widerspricht dies nicht der Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

Zeigen Sie, daß Homotopie von Abbildungen sowie Homotopie von topologischen Räumen Äquivalenzrelationen sind!

Aufgabe 3: *(10 Punkte)*

Hier geht es um einen alternativen Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes: $f: B^n \to B^n$ sei eine fixpunktfreie Abbildung der Vollkugel auf sich selbst. Dann läßt sich wie folgt eine Abbildung $g: B^n \to B^n$ mit der Randsphäre S^{n-1} als Bild definieren: Man betrachte zu jedem Punkt $x \in B^n$ den Strahl von x durch $f(x)$ und definiere $g(x)$ als dessen Schnittpunkt mit $S^{n-1} \subset B^n$.

a) Wenn f stetig ist, ist offensichtlich auch g stetig. Zeigen Sie, daß g homotop ist zur Identität auf B^n.

b) Zeigen Sie, daß die Einschränkung von g zu einer Abbildung $h: S^{n-1} \to S^{n-1}$ surjektiv ist.

c) Zeigen Sie, daß h auch nullhomotop ist.

d) Beweisen Sie so den Brouwerschen Fixpunktsatz!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 27. Oktober 2016, um 15.25 Uhr