Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

14. Oktober 2016

6. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*

Ein topologischer Raum X heißt *lokal kompakt,* wenn er Hausdorffsch ist und jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung hat.

a) Zeigen Sie, daß jeder $\mathbb{R}^n$ lokal kompakt ist!

b) X sei ein lokal kompakter topologischer Raum. Die Alexandroff-Kompaktifizierung von X ist $\hat{X} = X \cup \{\omega\}$ für irgendein $\omega \notin X$, wobei eine Teilmenge $U \subset \hat{X}$ offen sein soll genau dann, wenn sie entweder eine offene Teilmenge von X ist oder aber das Komplement einer kompakten Teilmeng von X. Zeigen Sie, daß diese Vorschrift in der Tat eine Topologie auf $\hat{X}$ definiert und daß $\hat{X}$ damit ein kompakter topologischer Raum wird!

c) Zeigen Sie: Für $n \geq 1$ ist die Alexandroff-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ homöomorph zur n-Sphäre $\mathbb{S}^n$.

d) Zeigen Sie: Sind X, Y zwei zueinander homöomorphe topologische Räume, so sind auch ihre Alexandroff-Kompaktifizierungen $\hat{X}$ und $\hat{Y}$ zueinander homöomorph.

e) Folgern Sie, daß $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ für $n \neq m$ nicht zueinander homöomorph sind!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

Zeigen Sie, daß jede Karte auf einem Torus mit höchstens sieben Farben so gefärbt werden kann, daß keine zwei Nachbargebiete die gleiche Farbe haben!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

Berechnen Sie für die folgenden Abbildungen der Kreislinie $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ auf sich selbst die Lefschetz-Zahlen:

a) Drehung um $90°$

b) Spiegelung an der x-Achse

c) Spiegelung am Nullpunkt.

d) Was ändert sich, wenn Sie die genannten Abbildungen auf der Kreisscheibe betrachten?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 20. Oktober 2016, um 15.25 Uhr