

30. September 2016

4. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: (3 Punkte)

- a) Finden Sie eine echte Untergruppe von \mathbb{Z}^2 , die selbst Rang zwei hat!
- b) Zeigen Sie: Für jede solche Untergruppe $H < \mathbb{Z}^2$ ist die Faktorgruppe \mathbb{Z}^2/H endlich.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Der abstrakte simpliziale Komplex \mathfrak{K} bestehe aus n Ecken P_1, \dots, P_n , den Kanten $P_i P_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-1$ und $P_1 P_i$ für $i = 2, \dots, n$, sowie den Dreiecken $\triangle P_1 P_i P_{i+1}$ für $i = 2, \dots, n-1$.

- a) Skizzieren Sie für $n = 6$ eine geometrische Realisierung dieses Komplexes in \mathbb{R}^2 !
- b) Bestimmen Sie die Ränge aller Ketten-, Zykel- und Rändergruppen!
- c) Berechnen Sie die Homologiegruppen von \mathfrak{K} !

Aufgabe 3: (12 Punkte)

Triangulieren Sie die folgenden topologischen Räume, und berechnen Sie jeweils die alternierende Summe „Ecken – Kanten + Dreiecke“ sowie die Ränge der Homologiegruppen:

- a) Der Kreisring $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$
- b) Das MÖBIUS-Band: Es entsteht, indem man bei einem Rechteck zwei gegenüberliegende Seiten so verklebt, daß jeweils die diagonal entgegengesetzten Ecken miteinander identifiziert werden.

Hinweis: Insbesondere bei der Berechnung der ersten Homologie sollten Sie eher inhaltlich als formal argumentieren; andernfalls erhalten Sie schnell sehr lange Ausdrücke.

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 6. Oktober 2016, um 15.25 Uhr