

14. März 2014

5. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Ein simplizialer Komplex K heißt zusammenhängend, wenn je zwei Ecken von K durch einen Kantenzug verbunden werden können. Zeigen Sie: K ist genau dann zusammenhängend, wenn der topologische Raum $|K|$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Der KRONECKER-Index einer 0-Kette $\sum_{i=1}^r \alpha_i e_i$ eines simplizialen Komplexes K mit Ecken e_i ist $\sum_{i=1}^r \alpha_i$. Zeigen Sie:

- Ist K zusammenhängend, so ist eine 0-Kette genau dann ein Rand, wenn ihr KRONECKER-Index verschwindet.
- Zwei 0-Zykeln eines zusammenhängenden simplizialen Komplexes liegen genau dann in derselben Homologiekategorie, wenn sie denselben KRONECKER-Index haben.
- Für einen zusammenhängenden simplizialen Komplex K ist $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Finden Sie ein Beispiel für drei simpliziale Abbildungen $\varphi, \psi, \chi: K \rightarrow L$ zwischen zwei simplizialen Komplexen derart, daß zwar φ und ψ sowie ψ und χ benachbart sind, nicht aber φ und χ !

Aufgabe 4: (5 Punkte)

K sei der simpliziale Komplex, der aus den Ecken und Kanten eines Dreiecks besteht.

- Wie viele simpliziale Abbildungen $K \rightarrow K$ gibt es?
- Zwei simpliziale Abbildungen φ, ψ zwischen zwei simplizialen Komplexen gehören zur gleichen Nachbarschaftsklasse, wenn es eine Folge $\varphi = \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_r = \psi$ von simplizialen Abbildungen gibt derart, daß φ_i für jedes $i < r - 1$ zu φ_{i+1} benachbart ist. Finden Sie die Nachbarschaftsklassen unter den simplizialen Abbildungen aus a)!

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Die Kettenabbildungen $\varphi, \varphi': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $\psi, \psi': \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ zwischen den Kettenkomplexen \mathcal{C}, \mathcal{D} und \mathcal{E} seien homotop. Zeigen Sie, daß dann auch die Hintereinanderausführungen $\psi \circ \varphi$ und $\psi' \circ \varphi'$ homotope Kettenabbildungen zwischen \mathcal{C} und \mathcal{E} sind!

Abgabe bis zum Freitag, dem 21. März 2014, um 11.55 Uhr